Universität Duisburg-Essen

Fakultät für Bildungswissenschaften

Lehrstuhl für Pädagogische Psychologie

Tragfähige arithmetische Fähigkeiten beim Erwerb des Rechnen Lernens und Möglichkeiten der vorschulischen Förderung

Dissertation zur Erlangung des Grades Dr. phil.

vorgelegt von

Petra Langhorst

geboren am 01.10.1967 in Bocholt

Erstgutachterin: Prof. Dr. Annemarie Fritz-Stratmann, Universität Duisburg-Essen

Zweitgutachter: Prof. Dr. Franz Wember, Technische Universität Dortmund

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 2013

Danksagung

Mein größter und herzlichster Dank gebührt meiner Doktormutter Frau Prof. Dr. Annemarie Fritz-Stratmann. Ihre Fachkompetenz und ihre Forschungsarbeit haben mir eine Wissensbasis ermöglicht, die diese Arbeit entscheidend formte. Mit vielfältigen inhaltlichen Anregungen, kritischen Nachfragen und konstruktiven Stellungnahmen inspirierte sie mich immer wieder zu Erkenntnissen im Hinblick auf den Forschungsgegenstand. Erst durch ihre Unterstützung sind mein Promotionsprojekt und meine berufliche Weiterentwicklung derart möglich gewesen. Mein Dank gilt ihrer stetigen Offenheit und ihrem Vertrauen in mich. Neben der hervorragenden fachlichen Betreuung schätzte ich insbesondere das menschliche Interesse und die Herzlichkeit, mit denen sie mir begegnete.

Herrn Prof. Dr. Franz Wember danke ich für seine freundliche Bereitschaft zur Zweitbegutachtung der Dissertation.

Mein besonderer Dank richtet sich zudem an meine Kollegin Frau Dr. Antje Ehlert. Von Beginn bis zur Fertigstellung der Arbeit war sie jederzeit meine hilfsbereite Ansprechpartnerin. Die Zusammenarbeit mit ihr und ihr Fachwissen waren für mich eine maßgebliche Bereicherung. Ohne ihre wertvolle fachliche Unterstützung in forschungsmethodischen Fragen hätten sich einige Entstehungsphasen dieser Arbeit für mich viel schwieriger gestaltet. Während des gesamten Zeitraumes habe ich unsere ausgesprochen angenehme Arbeitsatmosphäre sehr zu schätzen gewusst.

Das Gelingen der Durchführung der empirischen Studien verdanke ich den vielen teilnehmenden Kindern, Erzieherinnen und Erziehern, Lehrpersonen sowie Studierenden.

Insbesondere bedanke ich mich bei meinem lieben Sohn Johannes für sein Verständnis und seine Nachsicht. Meinem Freund Thomas danke ich für seine liebevolle Unterstützung und den starken emotionalen Rückhalt. Beide haben mir mit viel Geduld und ermunternden Worten und Taten anhaltend zur Seite gestanden.

Meiner Freundin Ute danke ich für ihr fortwährendes Interesse an meiner Arbeit und für den wohlmeinenden moralischen Beistand während der ganzen Zeit.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern für ihre zuverlässige Unterstützung und ihr stets in jeglicher Hinsicht vorbehaltloses Zutrauen.

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

„Die flackernde Flamme der mathematischen Intuition im Geist des Kindes muss gestärkt und genährt werden, bevor sie alle arithmetischen Aktivitäten erhellen kann.“

(Dehaene, 1999, S. 163)

Gute mathematische Kenntnisse sind wesentlich für eine erfolgreiche Schullaufbahn und eine qualifizierte Berufsausbildung. Internationale und nationale Schulleistungsvergleichsstudien wiesen jedoch nach, dass viele Schülerinnen und Schüler erhebliche Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben. In der Grundschulstudie IGLU (Bos et al., 2003) erbrachten 20 % der Kinder am Ende des 4. Schuljahres nur Leistungen, die dem Kenntnisstand des 2. Schuljahres entsprachen. Probleme im mathematischen Bereich zeigen sich auch im Jugendalter. In der PISA-Studie 2006 (PISA-Konsortium, 2008) konnte ein Fünftel der 15-Jährigen Aufgaben nur auf Grundschulniveau lösen. Zwar stellen sich die PISA-Ergebnisse 2009 (Klieme et al., 2010) mittlerweile leicht verbessert dar, jedoch noch immer nicht zufrieden stellend. Bereits die Veröffentlichung der Ergebnisse der ersten PISA-Studie (Baumert et al., 2001) löste eine Bildungsdebatte auch um das Lernen im *Elementarbereich* aus und zeichnete verantwortlich für eine Neubewertung und stärkere Gewichtung vorschulischer Lernprozesse. Es wurde ein Zusammenhang zwischen der Dauer des Besuchs einer vorschulischen Einrichtung und den Mathematikleistungen in der Sekundarstufe nachgewiesen (Ehmke, Siegle & Hohensee, 2005; Prenzel et al., 2004). Hinzu kamen Befunde aus Langzeitstudien, die dem mathematischen Vorwissen eine einflussreiche und prädiktive Bedeutung für das Mathematiklernen im Grundschulalter zuschreiben. Ungenutzte Potenziale von Kindern bedeuten im Laufe der Schulzeit anhaltende Defizite, die kaum aufzuholen sind (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Grube & Hasselhorn, 2006; Krajewski & Schneider, 2006; Weißhaupt, Peucker & Wirtz, 2006).

Die entscheidenden Weichen für erfolgreiches schulisches Mathematiklernen werden folglich früh gestellt. Der bemerkenswerten Rolle des frühen Wissenserwerbs sollte in frühzeitigen Bildungsinvestitionen verbindlich Rechnung getragen werden. Mathematische Bildungsaktivitäten hatten zuvor über Jahre ein Schattendasein in vorschulischen Institutionen geführt. Es entstanden nachdrückliche Forderungen nach der Optimierung einer effizienten Vermittlung von sich bereits im Kindergartenalter anbahnenden Fähigkeiten. Die vor diesem Hintergrund in Deutschland formulierten Bildungs- und Orientierungspläne (z. B. Jugend- und Kultusministerkonferenz, 2004) sind jedoch bis heute in ihren Vorgaben zu den Inhalten noch zu beliebig und lassen konkrete Möglichkeiten zur konzeptuellen Umsetzung vermissen. Eine grundsätzliche Reflexion über die Qualität der vorschulischen mathematischen Bildung ist nach wie vor ein bedeutendes Forschungsdesiderat. Für die Konzipierung einer frühen fachgerechten mathematischen Förderung sind präzise Entwicklungsbeschreibungen über den Erwerb der wesentlichen mathematischen Fähigkeiten unerlässlich. Diese sollten nicht nur mit Blick auf schulcurriculare Vorgaben ausgerichtet sein, sondern auch auf Forschungsbefunden aufbauen, die den Erwerb des mathematischen Verständnisses als komplexes Schema aus entwicklungspsychologischer Perspektive auffassen. Demgemäße Forschungsergebnisse zeigen bereits auf, wie sich frühe mathematische Entwicklungsprozesse vollziehen (z. B. Carey, 2009; Dehaene, 1999; Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004; Fritz & Ricken, 2008; Fuson, 1988; Resnick, 1989).

Grundsätzlich beschäftigt sich die Arbeit mit zwei Forschungsanliegen:
Ein Schwerpunkt liegt auf der Erläuterung, zu welchen zentralen arithmetischen Fähigkeiten Kinder gelangen können und sollten. Dabei handelt es sich um einen sehr komplexen Entwicklungsverlauf, gleichwohl sind sehr genaue Kenntnisse über die den einzelnen Konzepten konkret unterliegenden Strukturen von großer Evidenz. Die vorliegende Arbeit hat das Teile-Ganze-Konzept herausgegriffen. Da es eine zentrale Leistung im arithmetischen Kompetenzerwerb darstellt und Grundlage vieler darauf aufbauender weiterer Konzepte ist, sollten seine exakten Entwicklungsverläufe und ihre Ausprägung bekannt sein. Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit liegt auf der Fragestellung, wie die Förderung der grundlegenden arithmetischen Fähigkeiten im Vorschulalter angemessen gestaltet werden kann.

Den beiden Schwerpunkten entsprechend ist der Theorieteil in zwei Kapitel untergliedert. Das erste Kapitel gibt einen Überblick über die Entwicklung der wesentlichen arithmetischen Fähigkeiten bei Kindern bis zum Alter von 8 Jahren. Zunächst werden die frühen non-verbalen Kernsysteme zur mentalen Repräsentation von Quantitäten erläutert und diesbezügliche Erklärungsansätze betrachtet. Die anschließende Erörterung der Entwicklung des Zahlbegriffs zeigt, wie sich sein umfassender Erwerb in zwei Entwicklungslinien, in Form des nicht-numerischen Mengenwissens und des numerisch präzisen Zahl- und Mengenwissens, und später in deren Kopplung vollzieht. Nachfolgend werden mögliche Zusammenhänge zwischen den frühen Kernsystemen und den verbalen, erlernten Wissenssystemen diskutiert. Letztlich werden in einem Entwicklungsmodell zum Rechnen Lernen die tragenden arithmetischen Konzepte zusammen getragen.

Mit der ausführlichen Beschreibung der Entwicklung arithmetischer Fähigkeiten im ersten Kapitel schlägt die Arbeit die Brücke zum zweiten Kapitel des Theorieteils über die frühe mathematische Förderung. Denn die Konkretisierung der einzelnen Entwicklungsstadien birgt die Möglichkeit, Inhalte für eine zielführende Förderung im Elementarbereich und am Übergang zum Primarbereich zu definieren. Das zweite Kapitel sucht zudem vor allem zur Klärung der Frage nach einer geeigneten Gestaltung der frühen mathematischen Förderung beizutragen. Dazu werden verschiedene Ansätze zur Frühförderung skizziert. Um aus ihrer Unterschiedlichkeit sinnvoll eingrenzen zu können, werden Kriterien für eine Förderung im vorschulischen Bereich generiert. Evaluierte nationale Förderprogramme zeigen auf, ob und wie eine mathematische Frühförderung erfolgreich realisierbar ist. Der theoretische Teil I schließt mit der Darstellung eines Förderkonzepts für 4- bis 8-jährige Kinder, das inhaltlich entlang eines theoriegeleiteten und empirisch abgesicherten Modells grundgelegt ist und somit einer entwicklungsorientierten Förderung gerecht werden kann.

Teil II der Arbeit wendet sich in insgesamt sechs empirischen Studien den beiden Forschungsschwerpunkten zu. Der Empirieteil setzt sich aus vier Publikationen zusammen, von denen jeweils zwei - den beiden Forschungsschwerpunkten entsprechend – als zueinander in Relation stehend zu betrachten sind. Aus Gründen der besseren Übersicht sind die Studien in dieser Arbeit als Studien I bis VI wie folgt benannt:

Die ersten beiden Veröffentlichungen fokussieren auf das Teile-Ganze-Konzept und beleuchten in drei eigenen empirischen Studien die Verfügbarkeit des Konzepts.

1. Veröffentlichung:
    - Studie I: Teile-Ganze Konzept (4- bis 8-Jährige)
2. Veröffentlichung:
    - Studie II: Teile-Ganze Konzept (Zweitklässler)
    - Studie III: Teile-Ganze Konzept (Fünftklässler)

Die weiteren beiden Veröffentlichungen befassen sich in drei empirischen Studien mit der ausführlichen Betrachtung eines vorschulischen Förderprogramms durch Evaluationen unter verschiedenen Schwerpunkten.

3. Veröffentlichung:
    - Studie IV: Frühförderung (Vorschulkinder)
    - Studie V: Frühförderung (jüngere Kindergartenkinder)
4. Veröffentlichung:
    - Studie VI: Frühförderung (Vorschulkinder)

Die Interventionsstudie IV beschäftigt sich mit der Prüfung der kurz- und langfristigen Effekte nach dem Training mit Vorschulkindern. Zuzüglich zu dieser eigenen Längsschnittstudie wird eine Studie vorgestellt, die im Rahmen des Dissertationsprojektes von Claudia

Hildenbrand, Universität Hamburg, durchgeführt wurde. Diese Studie V untersucht die unmittelbare Wirksamkeit des Trainings auf Fähigkeiten jüngerer Kindergartenkinder und blickt auf Aspekte unterschiedlicher Förderansätze. Die eigene Studie VI betrachtet das Förderprogramm schließlich vertiefend unter phonologischen Gesichtspunkten.

Abschließend werden die Resultate der einzelnen Studien zusammengefasst sowie ihre theoretische und praktische Bedeutung dargestellt.

Teil I

1 Forschungshintergrund: Entwicklung arithmetischer Fähigkeiten

1.1 Vorsprachliches Mengenverständnis

Bereits bevor der Spracherwerb einsetzt, werden mentale Repräsentationen von Mengen gebildet, die schon sehr kleine Kinder zur globalen Verarbeitung von großen Mengen und zur präzisen Verarbeitung von kleinen Mengen befähigen. Diese frühen nicht-numerischen, von verbalen Wissenssystemen unabhängigen Konzeptentwicklungen werden im Folgenden ausführlich dargestellt und finden hier besondere Berücksichtigung, da sie für nachfolgendes mathematisches Wissen von grundlegendem Interesse sind.

1.1.1 Systeme des Kernwissens

> „Complex cognitive skills such as reading and calculation and complex cognitive achievements such as formal science and mathematics may depend on a set of building block systems that emerge early in human ontogeny and phylogeny. (…) By combining representations from these systems, however, human cognition may achieve extraordinary flexibility." (Spelke, 2000, S. 1233)

Die Theorie über das Kernwissen („core knowledge") nimmt an, dass der Mensch über mehrere angeborene kognitive Systeme verfügt, die führend für das weitere Lernen sind. Spelke und Kinzler (2007, S. 90 ff.) gehen von einem genuinen Kernwissen aus, das sich nicht durch Erfahrung oder durch Kultur entwickelt. Sie beschreiben fünf Systeme des Kernwissens. Diese Kernwissen-Systeme für Objekte, für Personen, für Anzahlen sowie Zahlbeziehungen, für den euklidischen Raum und für soziale Beziehungen sind wie folgt beschränkt: sie sind domänenspezifisch (jedes System repräsentiert nur einen Teilbereich, den Menschen erfassen können), sie sind aufgabenspezifisch (jedes System dient zur Lösung für eine begrenzte Auswahl von Problemen) und sie sind unabhängig (jedes System hat eine gewisse Unabhängigkeit von anderen kognitiven Systemen).

Entscheidend ist, dass späteres Wissen und Lernen auf diesen Kernsystemen basiert, die fortbestehen und die in der weiteren Entwicklung angereichert werden sowie sich ausdifferenzieren (Spelke, 2000).

> „Research on older children and on adults suggests that the core knowledge systems found in infants contribute to later cognitive functioning in two ways. First, core systems continue to exist in older children and adults, giving rise to domain-specific, task-specific, and encapsulated representations like those found in infants. Second, core systems serve as building blocks for the development of new cogni-

> tive skills. When children or adults develop new abilities to use tools, to perform symbolic arithmetic calculations, to read (…), or to reason about other people's mental states, they do so in large part by assembling in new ways the representations delivered by their core systems." (Spelke, 2000, S. 1233)

1.1.2 Kernsysteme zur Verarbeitung von Mengen

Dieser kognitionspsychologische Ansatz zu den Kernsystemen wird nun für die primären Fähigkeiten zur Verarbeitung von Quantitäten erläutert. Es handelt sich um ein nicht-numerisches Verständnis quantitativer Situationen, das vorsprachlich und vor dem Umgang mit Zahlworten besteht.

Bezüglich der frühen Kernsysteme (core systems) zur Verarbeitung von Quantitäten unterscheiden Feigenson et al. (2002, 2004) zwei angeborene Repräsentationssysteme, die zu einem Erkennen und Vergleich zweier Mengen befähigen:

- das näherungsweise arbeitende, analoge Mengen-Repräsentationssystem („Analog-magnitude-system", Feigenson, Carey & Hauser, 2002, S. 150) zur approximativen Verarbeitung von globalen größeren Mengen („Approximate representations of numerical magnitude", Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004, S. 307)
- das präzise arbeitende Mengen-Repräsentationssystem („Object-file-system", Feigenson, Carey & Hauser, 2002, S. 150) zur Verarbeitung von kleinen distinkten Mengen („Precise representations of distinct individuals", Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004, S. 310).

Um diese frühen Fähigkeiten schon bei Säuglingen untersuchen zu können, werden Habituationsexperimente genutzt. Bei der Habituation nehmen Reaktionen auf Reize ab, wenn der Reiz über längere Zeitspannen andauert (Thorpe, 1944). Schon bei Säuglingen kann ein gewisser Reiz so häufig gesetzt werden, bis der Säugling seine Aufmerksamkeit nicht mehr darauf richtet. Dieser Reiz wird dann im Wechsel mit einem neuen Reiz dargeboten – reagiert der Säugling mit längeren Blickfixationszeiten darauf, ist das ein Zeichen, dass er den Unterschied der beiden Reize wahrgenommen hat.

1.1.2.1 Kernsystem 1: Analog-magnitude-System

Das analoge Mengen-Repräsentationssystem erlaubt unpräzise, schätzende Vergleiche von größeren Mengen, die nicht als *einzelne diskrete* Einheiten repräsentiert sind (Feigenson et al., 2002, 2004). Dehaene (1997, 1999) spricht bei diesen genetisch determinierten bzw. sehr früh entwickelten Fähigkeiten zur approximativen Mengenrepräsentation von dem „protonumerischen Modul" der analogen Repräsentation von Größen, auch „Approximate-Number-System“ („ANS”) genannt (Dehaene, 1997, S. 55).

Fähigkeiten im Säuglingsalter

Habituationsstudien zeigen, dass Säuglinge bereits zwei Mengen quantitativ unterscheiden können, wenn die Mengen als Punktmengen auf Bildern dargestellt sind, die nach Merkmalen, u. a. wie Fläche oder Dichte, kontrolliert werden. In mehreren Experimenten konnten 6 Monate alte Säuglinge größere Objektmengen *im Verhältnis 1:2* unterscheiden, wie 4 versus 8, 8 versus 16 und 16 versus 32 Objekte. Punktmengen mit 8 und 12 oder 16 und 24 konnten hingegen nicht erfolgreich unterschieden werden (Brannon, Abbott & Lutz, 2004; Xu, 2003; Xu & Spelke, 2000; Xu, Spelke & Goddard, 2005). Die Diskriminationsfähigkeit nimmt im Laufe des ersten Lebensjahres zu: Ab einem Alter von 9 bis 10 Monaten konnten Quantitäten *im Verhältnis 2:3* eingeschätzt werden, z. B. 4 vs. 6 oder 8 vs. 12 Objekte. Jedoch konnten 8 versus 10 Objekte im Verhältnis 4:5 nicht unterschieden werden (Lipton & Spelke, 2003; Xu & Arriaga, 2007). Diese Fähigkeit zur quantitativen Unterscheidung ist also zum einen noch unpräzise, das heißt, sie beruht auf der Grundlage ungefährer Schätzungen, und zum anderen ist sie von den *Relationen* zwischen den beiden Mengen abhängig.

Das Analog-magnitude-System erlaubt nicht nur den schätzenden Vergleich von Mengen, sondern scheinbar auch das serielle Ordnen von Mengen nach ihrer Größe. Eine Studie von Brannon (2002) wies diese frühe Fähigkeit zum Erkennen ordinaler Aspekte in Mengen nach. Eine intuitive Entwicklung der Ordinalität vollzieht sich vermutlich im Alter zwischen 9 und 11 Monaten. In der Untersuchung von Brannon wurden Kindern Mengenbilder mit auf- oder absteigenden numerischen Werten in Form von z. B. 4 bis 9 Punkten vorgegeben. Wurden die Bilder nach der Habituierung in umgekehrter Reihenfolge präsentiert, zeigten die 9 Monate alten Kinder keine Reaktion auf die ordinalen Relationen, dagegen schauten die 11 Monate alten Kinder signifikant länger auf die ungewohnte Reihenfolge und bewiesen damit, dass sie die Mengen bezüglich ihrer „größer als“ und „kleiner als“-Beziehung repräsentieren bzw. nach „mehr“/„weniger“ differenzieren konnten.

Außerdem wird vermutet, dass das Analog-magnitude-System bereits ein erstes globales Erkennen von operativen Mengenveränderungen ermöglicht. In einem Versuch von McCrink und Wynn (2004) bewiesen schon 9 Monate alte Kinder ein erstes Verständnis für einfache operative Beziehungen des Vermehrens. Hinter einer Abdeckung verschwanden erst 5 und dann noch einmal 5 Rechtecke; wurde die Abdeckung entfernt, sahen die Kinder entweder 10 Rechtecke oder nur 5 Rechtecke - die erwartungswidrige Ergebnismenge von 5 wurde signifikant länger betrachtet.

Handelt es sich bei dem approximativen Kernsystem um primäre Fähigkeiten?

Es besteht die Annahme, dass das approximative Kernsystem angeboren ist, sowie während des ganzen Lebens Fortbestand hat und daher unabhängig von der formalen mathematischen Bildung in allen Kulturen vorhanden ist (Spelke & Kinzler, 2007). Einen entsprechenden Hinweis darauf geben Studien mit dem amazonischen Volk der Mundurukus (Pica, Lemer, Izard & Dehaene, 2004). Die Mundurukus verfügen weder über Zählroutine noch über Zahlworte über drei hinaus. Obwohl sie kaum eine mathematische Bildung besitzen, bewiesen sie Fähigkeiten zum schätzenden Mengenvergleich. Sie konnten ähnlich genau zwischen zwei gleichzeitig präsentierten größeren Mengen, die zwischen 20 und 80 Punkten enthielten, differenzieren wie eine Gruppe mit französischen Erwachsenen. Auch zeigten die Studien mit den Mundurukus, dass sie ebenso wie US-amerikanische Vorschulkinder näherungsweise größere Mengen addieren und subtrahieren konnten. Beide vermochten korrekt zu beurteilen, ob zwei sukzessiv präsentierte Mengen zusammen größer oder kleiner waren als eine dritte präsentierte Menge (Pica et al., 2004; vgl. auch Barth, La Mont, Lipton, Dehaene, Kanwisher & Spelke, 2006).

1.1.2.2 Kernsystem 2: Object-file-System

Das zweite Kernsystem ist das Object-file-System. Unter „object-file" wird eine zeitweilige Repräsentation von einzelnen Objekten verstanden, durch die verschiedene aufeinander folgende Zustände der Objekte miteinander verbunden werden (Kahneman & Treisman, 1984). Das bedeutet, für jedes Objekt wird im Arbeitsgedächtnis eine eigene Datei (file) gebildet und es entstehen Einzelrepräsentationen für jedes Objekt, in der die Eigenschaften des Objekts kodiert werden (Le Corre & Carey, 2007). Das System wird auch als object-tracking-System bezeichnet (Simon, 1997; Trick & Pylyshyn, 1994).

> „**The object tracking system** (…) OTS is a mechanism by which objects are represented as distinct individuals that can be tracked through time and space. This core system for representing objects centers on the spatio-temporal principles of cohesion (objects move as bounded wholes), continuity (objects move on connected, unobstructed paths), and contact (objects do not interact at a distance). These principles enable human infants, as well as other animals, to perceive object boundaries, and to predict when objects will move and where they will come to rest (…). One of the defining properties of this system is that it is limited in capaci-

> ty to three or four individual objects at a time." (Piazza, 2010, S. 544, Hervorhebung im Original; vgl. auch Spelke & Kinzler, 2007, S. 89)

Das Object-file-System ermöglicht folglich die präzise Repräsentation kleiner distinkter Mengen. Damit können prägnante Einzelobjekte - sukzessiv vorgegeben - als eigene Größen erkannt und Mengen mit bis zu drei Elementen erkannt und unterschieden werden (Feigenson et al., 2002, 2004). Ungeachtet der Diskussion, ob die Kernsysteme angeboren sind, wurde in einer Reihe von Untersuchungen mit Säuglingen deutlich, dass sich diese Fähigkeiten zur Anzahlerkennung und -unterscheidung kleiner Mengen im ersten Lebensjahr sehr früh entwickeln. Diese Fähigkeiten sollen nun zunächst beschrieben werden, bevor anschließend Erklärungsansätze für die zugrundeliegenden Prozesse betrachtet werden.

Fähigkeiten im Säuglingsalter

In ersten Habituationsexperimenten zeigten Starkey und Cooper (1980) über die Messung der Blickdauer, dass bereits 4 Monate alte Säuglinge linear angeordnete kleine Mengen mit 2 versus 3 Punkten diskriminieren konnten, unabhängig von der präsentierten Abfolge oder des Abstandes der Punktmengen. 4 von 6 Objekten konnten hingegen nicht unterschieden werden. In Experimenten von Libertus und Brannon (2010) unterschieden 9 Monate alte Säuglinge erfolgreich zwischen 1 versus 2 und 1 versus 3 Punkten, jedoch noch nicht zwischen 2 versus 3 Punkten. Letzteres gelang in weiteren Studien zur Anzahldiskriminierung mit Säuglingen im Alter von 10 bis 12 Monaten (Feigenson, Carey & Hauser, 2002). Ihnen wurden zwei Boxen präsentiert, in denen nacheinander Kekse gelegt wurden, die danach nicht mehr sichtbar waren. Die Kinder krabbelten zuverlässig zu der Box mit der jeweils größeren Menge an Keksen, wenn sie zwischen 1 oder 2, 2 oder 3 bzw. 1 oder 3 Keksen wählen konnten. War die Alternative zwischen 3 und 4, 2 und 4 oder 3 und 6 Keksen zu wählen, schlugen Versuche der Wahl der größeren Menge fehl. Auch Strauss und Curtis (1981) stellten bei Säuglingen zwischen 10 und 12 Monaten fest, dass sie 2 von 3, nicht aber 4 von 5 Objekten diskriminieren konnten.

Diese Fähigkeit scheint nicht allein nur zur Unterscheidung von *statischen* Objekten gegeben zu sein, sondern auch zur Unterscheidung von Numerositäten in Form von sequentiell präsentierten Ereignissen: Mit 6 Monate alten Säuglingen führte Wynn (1996) Experimente mit sich bewegenden Puppen durch. Die Säuglinge wurden an 2 bzw. 3mal hüpfende Puppen habituiert. Wurde eine andere Hüpfsequenz präsentiert, reagierten die Säuglinge mit einer Dishabituation. Sie konnten also Ereignisfolgen numerisch diskriminieren, indem sie auf die unterschiedliche Anzahl von 2 bzw. 3 Sprüngen der Puppen reagierten. Ebenso zeigte eine Längsschnittstudie von van Loosbroek und Smitsman (1990) mit Säuglingen zwischen 5 und 13 Monaten, dass diese sich kontinuierlich bewegende Objekte in Form von 2 bis 4 Rechtecken erfolgreich unterscheiden konnten.

Das Object-file-System erlaubt über diese mentale Repräsentation von *visuell* dargebotenen Objekten hinaus auch die Repräsentation von auditiv oder taktil präsentierten Reizen (Féron, Gentaz & Streri, 2006; Starkey, Spelke & Gelman, 1990; van Marle & Wynn, 2009). In Experimenten mit 7 Monate alten Säuglingen, in denen ihnen Tonsequenzen paarweise vorgespielt wurden, die aus 2 versus 3, 4 versus 6 und 4 versus 8 stets gleichklingenden Tönen bestanden, konnten die Säuglinge in der auditiven Modalität 2 von 3 Tönen unterscheiden (Mack, 2002).

Oben wurde dargestellt, dass das Analog-magnitude-System das Erkennen von einfachen operativen Mengenveränderungen bei *größeren* Anzahlen erlaubt (McCrink & Wynn, 2004, Pica et al., 2004). Die Säuglingsforschung hat untersucht, ob über das Object-file-System auch frühe Fähigkeiten zum Erkennen von Mengenoperationen bei *kleinen* Anzahlen gegeben sind. Viel Beachtung finden dabei immer wieder Wynns (1992a) Habituationsstudien, in denen mit 5 Monate alten Säuglingen Experimente zu Additions- und Subtraktionsaufgaben durchgeführt wurden. In dem 1+1-Experiment beobachteten die Kinder, wie zwei Puppen auf einer Bühne nacheinander hinter einem Sichtschutz verschwanden. Wurde die Wand entfernt, schauten die Kinder signifikant länger, wenn statt der erwarteten 2 Puppen nur noch eine Puppe sichtbar war. Mit verlängertem Blickverhalten reagierten die Kinder auch, wenn das Experiment für die Subtraktionsoperation 2-1 vorgenommen wurde. Wynn argumentiert für ein angeborenes Konzept der *numerischen* Anzahlbestimmung, weil Kinder längere Zeit die falschen Ergebnisse von 1+1 oder 2-1 betrachteten. Sie schlussfolgert auf tatsächlich bereits vorhandene *numerische* Konzepte: „infants are able to calculate the precise results of simple arithmetical operations” und „infants possess true numerical concepts - they have access to the ordering of and numerical relationships between small numbers and can manipulate these concepts in numerically meaningful way” (Wynn, 1992a, S. 750).

Allerdings sind diese Befunde, mit denen Wynn ein konzeptuelles Anzahlverständnis begründet, sehr umstritten. Von vielen Autoren wird angenommen, dass die Säuglinge nur auf die Ereignisse dishabituieren, weil diese zugleich mit einer Veränderung perzeptueller Variablen einhergehen - werden physikalische Variablen wie Farbe oder Größe der Objekte verändert, reagieren Säuglinge länger auf die veränderte Menge, nicht auf die veränderte Anzahl: Nach Versuchen von Clearfield und Mix (1999, vgl. auch 2001) unterschieden 4 bis 6 Monate alte Säuglinge kleine Punktmengen bis 3 nicht nach der Anzahl, sondern nach den eingenommenen Flächen. Die Autoren geben zu bedenken, dass die Wahrnehmung von Mengenveränderungen bei Säuglingen nicht schon ein explizites Anzahlkonzept bedeutet, sondern auf weniger differenzierte Wahrnehmungsunterschiede für räumliche Ausdehnungen zurückgehen könnte. „The key finding was that infants looked significantly longer at the change in amount, but not the change in number (…). This suggests that when infants dishabituated in previous studies, their responses were based on overall amount“ (Clearfield, 2004, S. 310). Auch Mix, Huttenlocher und Levine (2002a) konstatieren: „we failed to find evidence that discrete number is represented in infancy. Instead, there is strong evidence that infants view spatial quantities in terms of total amount of substance” (ebd., S. 293). In der Reaktion mit längeren Blickzeiten werden demnach nicht Fähigkeiten eines ersten Rechnens gesehen.

Auch Mack (2002) sieht keinen Beleg dafür, dass Säuglinge die Mengenveränderung als *numerische* Operation erkennen. Vielmehr könnten sich die Säuglinge bei kleinen Anzahlen sowohl eine Puppe als auch zwei oder drei Puppen, die hinter den Schirm gestellt wurden, als Verbundobjekte *merken* („Puppe”, „Puppe-Puppe”, „Puppe-Puppe-Puppe”). Das bedeutet, in einer derart kleinen Gruppe von Objekten kann jedes einzelne Objekt indiziert werden, so dass ein Eins-zu-Eins-Vergleich möglich ist, wenn die neue kleine Objektgruppe gezeigt wird. Mit der Objektpermanenz ist zu begründen, dass Säuglinge überrascht sind, wenn ein Objekt ohne erkennbaren äußeren Einfluss anders aussieht als vorher. Demzufolge sind Säuglinge auch überrascht bei Veränderungen einer kleinen Gruppe von Objekten, wenn sie die Gruppentransformation nicht sehen konnten.

Ebenso konkludieren Wakely, Rivera und Langer (2000) nach eigenen Experimenten mit 5 Monate alten Säuglingen, in denen sie Wynns Befunde nicht replizieren konnten: „Whatever arithmetic competence young infants have must be fragile and subject to disruption. According to the Wakely study, the most comprehensive answer to whether young infants can add and subtract would seem to be ‘Not proved’" (Wakely et al., 2000, S. 1532) – „the only evidence of *precise* calculation comes from Wynn's experiment” (ebd., S. 1525). Selbst für 11 und 16 Monate alte Kinder konnten Wynns Ergebnisse nicht erfolgreich bestätigt werden (Langer, Gillette & Arriaga, 2003).

Die Forschungsbefunde bieten demzufolge keinen eindeutigen Beleg für die tatsächlich angeborene numerische Kompetenz in Form eines *Anzahlkonzepts* bei Säuglingen, zeigen jedoch, dass sich Fähigkeiten zur Anzahlerkennung und -diskriminierung sehr früh entwickeln.

Erklärung für frühe Fähigkeiten zur Anzahlerkennung und –diskriminierung: die Rolle des Subitizings

Zur Verfügbarkeit der frühen Fähigkeiten zur Anzahlerkennung und -diskriminierung gibt es unterschiedliche Erklärungsversuche. Im Zusammenhang mit diesen Fähigkeiten von Säuglingen und mit der Begrenzung des Object-file-Systems auf die Kapazität kleiner Anzahlen wird vor allem das *Subitizing* diskutiert.

Unter Subitizing (von lat. „subito“: sofort) wird die Fähigkeit gefasst, die Kindern das in Millisekunden schnelle quantitative Erfassen einer kleinen Menge von 1 bis 4 auf einen Blick erlaubt, ohne die einzelnen Elemente zählen zu müssen (Kaufman, Lord, Reese & Volkmann, 1949). Zur weiteren Begriffsbestimmung des Subitizings differenzieren Davis und Pérusse (1988) zwischen zwei Arten: Da Säuglinge noch nicht zählen können, bezeichnen sie das Subitizing vor dem Zählen als „pre-counting-Subitizing“. Dabei erbringen Säuglinge und kleine Kinder non-verbale Leistungen zur Mengenerkennung und Mengenunterscheidung ohne numerische Informationen. Das pre-counting-Subitizing erlaubt, eine kleine Anzahl auf der Ebene von Gleichheit oder Ungleichheit zu beurteilen, birgt aber kein Wissen über die absolute Anzahl. Vom „post-counting-Subitizing“ sprechen Davis und Pérusse (1988) nach dem Erwerb von Zählfähigkeiten, wenn Subitizing-Leistungen mit numerischen Informationen erbracht werden können. Das Phänomen des post-counting-Subitizings, wenn Kinder über Sprache verfügen, wird in Kapitel 1.2 näher erläutert.

An dieser Stelle wird zunächst auf das pre-counting-Subitizing eingegangen. Das Erkennen von Anzahlen sowie die Diskriminationsleistungen von 2 versus 3 bzw. auch 3 versus 4 Elementen bei Säuglingen kann als pre-counting-Subitizing interpretiert werden: Dieser Mechanismus mit der *Wahrnehmung* von kleinen Anzahlen bildet die *Grundlage* numerischer Kompetenzen bei kleinen Kindern, ist aber nicht a priori als numerische Kompetenz zu verstehen (Mack, 2002).

Der obigen Definition folgend geht es beim Subitizing eigentlich um das *simultane* Wahrnehmen einer kleineren Menge aus *gleichzeitig* präsentierten Elementen. Bei den beschriebenen Säuglings-Experimenten zum Object-file-System wurden jedoch oftmals die

Objekte *sukzessiv* dargeboten. Wie kann das Subitizing dennoch Aufschluss über die frühen Fähigkeiten zur Anzahldiskriminierung geben? Die Art des Item-Subitizings versus des sequentiell verarbeitenden Ereignis-Subitizings (Kaufmann & Nuerk, 2005) wird in der Forschung diskutiert und im Folgenden werden dazu Erklärungsansätze betrachtet.

Folgt man dem Object-file-Modell von Kahneman und Treisman (1984; Kahneman, Treisman & Gibbs, 1992) ist das Subitizing ein Nebeneffekt des visuellen Systems. Der visuelle Strom wird in distinkte perzeptive Objekte zerlegt. Das Endprodukt der visuellen Verarbeitung einer stationären Szene sind object-files, sozusagen Ordner, die Informationen über ein gewisses Objekt der Szene beinhalten. Die Identität eines Objektes wird aufrechterhalten, obwohl es sich verändert oder bewegt. Um diese perzeptive Kontinuität festzustellen, sind mehrere Operationen erforderlich, die kurz skizziert werden sollen (vgl. Mack, 2002): Eine Korrespondenzoperation prüft, ob die Repräsentation eines Objektes einem neuen Objekt entspricht oder ob es sich um das soeben verarbeitete Objekt handelt, das sich an einen anderen Ort bewegt hat. Ein Rückvergleichsprozess aktualisiert Merkmale des nicht mehr sichtbaren Objektes. Jede neue Wahrnehmung führt also dazu, dass es einen Vergleich mit den vorherigen Zuständen gibt. Sind die Zustände ähnlich, wird das Objekt als kontinuierlich interpretiert, sind sie unähnlich, wird die Zwischenablage gelöscht und eine neue angelegt, die dann das neue Objekt repräsentiert. Ein Ergänzungsprozess verbindet die momentane und die unmittelbar vorausgegangenen Informationen so, dass ein sinnvolles Perzept der Bewegung oder Veränderung entsteht.

Autoren der oben vorgestellten Säuglingsstudien zum Object-file-System, die sich zwar nicht explizit mit dem pre-counting-Subitizing beschäftigt haben, lassen dennoch in dem Phänomen des Subitizings Begründungen für die Leistungen der Säuglinge anklingen. Xu und Spelke (2000) nehmen an, dass bei Säuglingen für kleine Anzahlen noch jedes Element einzeln und nicht als Menge mit einer bestimmten Größe gespeichert wird. Kinder würden demnach kleine Anzahlen bis 3 einzeln wahrnehmen und durch Mechanismen wie objektbasierende Aufmerksamkeit verarbeiten, die mit dem Subitizing zusammenhängen (siehe unten). Auch Starkey und Cooper (1980) sehen in ihren Befunden zur Diskriminationsleistung von 2 versus 3 Objekten ein Indiz für den Prozess des Subitizings, indem sie die Vermutung nahe legen, dass die Säuglinge zunächst wenige Objekte als „ein Ding und ein Ding” auffassen würden. Nach Mack (2002) haben Säuglinge ein Perzept von „Einheit“, „Zweiheit“ und „Dreiheit“, das sie als Objekteigenschaft wahrnehmen und das unabhängig von der Sprache und dem Zählen ist:

> „Es handelt sich bei diesem Mechanismus um einen Segmentations- oder Individuationsmechanismus, der drei perzeptive Einheiten erzeugt. Diese sind als ‚Einheit', ‚Einheit - Einheit', ‚Einheit - Einheit - Einheit' aufzufassen, welche nicht mit dem Zahlbegriff ‚Eins', ‚Zwei' und ‚Drei' gleichgesetzt werden dürfen. (…) Die Entdeckung einer Numerositätsdiskrepanz setzt nicht nur einen Individuationsmechanismus, sondern auch eine gedächtnismäßige Repräsentation der Numerosität voraus, so dass sie verglichen werden kann. Der Vergleich lässt sich als Diskrimination von ‚gleich' vs ‚ungleich' konzeptualisieren, bzw. von ‚gleichmächtig' vs ‚nicht gleichmächtig'" (Mack, 2002, S. 141 f.).

Im Zusammenhang mit dem *simultanen* Mengenerfassen wird immer wieder die Rolle der Mustererkennung diskutiert. „Pattern-matching theories assume that subjects retrieve the numerosity of a display from memory without engaging a counting process (…). The pattern-matching hypothesis assumes that displays in the subitizing range (one to three or four objects) can support accurate retrieval of numerosity, whereas displays in the counting range (more than four objects) cannot and so must be enumerated by iterative counting" (Logan & Zbrodoff, 2003, S. 676). Von Glasersfeld (1982) sieht das Subitizing als perzeptuell an und vermutet eine Art Mustererkennung als Grundlage dieses Wahrnehmungsprozesses. Auch Mandler und Shebo (1982) und Peterson und Simon (2000) nehmen an, dass die Anzahl präsentierter Objekte durch eine Mustererkennung identifiziert wird.

Gegen die Musterhypothese im Bereich des pre-counting-Subitizings sprechen jedoch obige Studien, in denen nicht nur statische, sondern auch auditiv präsentierte Reize oder bewegte Objekte in ihrer Anzahl unterschieden werden konnten. Die Studie von van Loosbroek und Smitsman (1990) zeigte, dass die Wahrnehmung von kleinen Mengen nicht der Mustererkennung unterlag: In ihren Experimenten wurden sich kontinuierlich bewegende 2 bis 4 Rechtecke erfolgreich unterschieden. Die Autoren sehen darin eine Bestätigung, dass es sich bei der Erfassung der sich bewegenden Objekte nicht um eine Musterwahrnehmung handeln kann, sondern distinkte Einheiten in einem visuellen Verarbeitungsprozess unterschieden werden. Auch Wynn (1996) zeigte dieses Phänomen zur Unterscheidung von Numerositäten in ihren Experimenten mit den hüpfenden Puppen und führt daher die Fähigkeit nicht auf die Mustererkennung zurück.

Gegen das Erkennen von kleinen Mengen auf Basis von Mustern wenden auch Trick und Pylyshyn (1993, 1994) ein, dass schon ab drei Objekten, die Anzahl möglicher Musterkombinationen so deutlich zunimmt, dass die Muster ihre Eindeutigkeit als Hinweise verlieren. Die Autoren haben sich mit anderen Erklärungen des Subitizings beschäftigt - sie beleuchten Subitizing im visuellen Bereich über Prozesse der objektbasierten Aufmerksamkeit. Das non-numerische Modell von Trick und Pylyshyn kann hier nur kurz skizziert werden (in Anlehnung an Mack, 2002): Die Autoren sehen im Subitizing ein Nebenprodukt eines präattentiven und parallel ablaufenden Prozesses, den sie FINST (Finger-INSTantiation) nennen. Dessen Zweck besteht in der Individuierung distinkter Merkmale oder einer kleinen Anzahl von Merkmalbündeln. Zur Wahrnehmung von Reizdarbietungen werden Merkmals-Cluster separiert und einzelnen mentalen Verweismarkern zugewiesen („mental reference tokens“, Trick, 1992, S. 272; auch fingers of instantiation), wobei ihre maximale Anzahl der Subitizingspanne entspricht. Subitizing ist demzufolge ein Effekt der Arbeitsweise des visuellen Systems, welches durch das Individuieren von Objektmerkmalen gekennzeichnet ist, aus denen Objekte konstruiert werden. Es ist Resultat paralleler Verarbeitungsprozesse, deren Funktion in der Individuation und Bildung perzeptiver Einheiten besteht. Das Subitizing wird nicht nur als Nebenprodukt von Prozessen der Segmentation interpretiert: Es reflektiert auch einen Prozess der Objektbindung, in dem ein Objekt aus einzelnen Merkmalen zusammengesetzt wird. Die in den frühen Verarbeitungsstufen der visuellen Wahrnehmung ablaufenden Prozesse konstituieren den Aufbau von Objektrepräsentationen und Ereignisrepräsentationen sowie ihre Integration. Nach dem FINST-Modell kann auf dieser Verarbeitungsstufe nur eine kleine Anzahl von Objekten parallel verarbeitet werden – diese Kapazitätsbeschränkung ist eine Folge der Notwendigkeit (track keeping problem). Die maximal dynamisch verfolgbare Anzahl scheint bei vier Objekten zu liegen.

Ein dem FINST-Modell ähnlicher Erklärungsansatz wurde auch oben bereits mit dem Object-file-Modell dargestellt. Weitere Theorien (Dehaene & Changeux, 1993; Gallistel & Gelman, 1991; Leslie, Xu, Tremoulet, & Scholl, 1998; Mandler & Shebo, 1982; Peterson & Simon, 2000) haben Mechanismen für frühe numerische Leistungen erörtert, können hier jedoch nicht alle thematisiert werden. Insgesamt ist die Forschungslage noch unklar (vgl. Mix, Huttenlocher & Levine, 2002b) und es bleiben zu den verschiedenen Modellen viele Fragen offen:

> „To conclude, the models (…) might be more or less suited to exemplify pre(non)verbal quantity knowledge. However, they neither attempt to provide an explanatory framework for the many remaining building blocks that constitute arithmetic knowledge (…) nor do they attempt to link the diverse components of numerical and arithmetic thinking. Instead, most of these models do only account for few or even only one elementary numerical task.” (Kaufmann & Nuerk, 2005, S. 148).

1.1.2.3 Trennbarkeit der Kernsysteme

Nach der Darstellung der beiden Kernsysteme stellt sich die Frage, inwiefern eine Verbindung zwischen ihnen besteht und ob sie voneinander abhängig sind. In mehreren Untersuchungen wurden die Trennbarkeit der beiden Kernsysteme und ihre Grenzen näher untersucht.

Xu und Spelke (2000) nehmen zwei getrennte Repräsentationssysteme an: Unabhängig von dem Mechanismus für große Mengen, der darauf spezialisiert ist, ungefähre Repräsentationen abzubilden, besteht nach ihren Aussagen ein Mechanismus für die Repräsentation von kleinen Zahlen. In ihrem oben erwähnten Habituationsversuch zum Analog-magnitude-System konnten 6 Monate alte Säuglinge erfolgreich zwischen zwei größeren Mengen mit 8 versus 16 Punkten unterscheiden. Xu (2003) erweiterte den Versuch um Aufgaben mit kleinen Punktmengen, um herauszufinden, ob auch bereits ein Verständnis für die Mengendiskrimination vorliegt, die sich auf die Gleichheit oder Verschiedenheit von kleinen Mengen bezieht - 6 Monate alte Säuglinge scheiterten bei der Anzahldiskriminierung zwischen 2 und 4 Punkten: „Results showed that infants succeeded in discriminating 4 from 8 elements but failed to discriminate 2 from 4 elements, providing evidence for the existence of two systems of number representations in infancy” (ebd., B15).

Die Trennbarkeit der Systeme wurde auch für ältere Säuglinge nachgewiesen. In dem oben erwähnten Experiment von Feigenson, Carey & Hauser (2002) zum Object-file-System hatten die 10 bis 12 Monate alten Kinder zunächst gezeigt, dass sie einen Keks von 2 und auch 2 von 3 Keksen unterscheiden konnten. Wurde dann allerdings die Anzahl erhöht und wurden 3 Kekse nacheinander in eine undurchsichtige Box und 6 Kekse nacheinander in eine andere Box gelegt (bzw. 2 versus 4 Kekse), konnten die Kinder die Mengen nicht mehr unterscheiden. Geht man von einer Integration der beiden Systeme aus, müssten die größeren Mengen eigentlich zu unterscheiden sein, zumal die beiden Mengen hier ebenso wie im obigen Versuch zum Analog-magnitude-System im Verhältnis 1:2 dargeboten wurden. Das war allerdings nicht der Fall. Bei kleinen Anzahlen findet die Proportionalität also keine Anwendung. Wiederum wird die Beschränkung des Analog-magnitude-Systems deutlich: es erlaubt die Verarbeitung einer größeren Menge, aber nur unter der Voraussetzung, dass die Menge *in ihrer Gesamtheit sichtbar* ist, das heißt, die einzelnen Objekte der Menge dürfen nicht einzeln nacheinander präsentiert werden. Es reicht jedoch für einen Vergleich zweier Mengen aus, wenn zunächst die *eine Menge* in ihrer Gesamtheit sichtbar ist und dann die andere Menge gezeigt wird - es müssen nicht

beide Mengen *gleichzeitig* sichtbar sein. In dem Versuch erschienen die einzelnen Kekse jedoch *sukzessiv* und verschwanden sofort in der Box. Derart konnten die Kinder sie nicht nachverfolgen und sie waren nicht mehr fähig, die größeren Mengen zu repräsentieren und zu unterscheiden.
Selbst eine Menge mit 4 sukzessiv präsentierten Objekten adäquat zu repräsentieren, schlug in einem anderen Versuch von Feigenson und Carey (2005) mit 12 Monate alten Kindern fehl. Dabei wurden Bälle nacheinander in Kisten gelegt. Es gelang den Kindern zwar, *einen* von zwei und drei Bällen bzw. auch *zwei* von drei in die Kisten gelegten Bällen zu unterscheiden, nicht aber *einen* von vier Bällen. Darin wird ein Beleg für die Trennbarkeit der beiden kognitiven Systemen gesehen: Einzelne bis maximal drei Objekte werden in diesem Alter im Object-file-System verarbeitet, mehr als 3 Objekte werden hingegen approximativ in analoger Form repräsentiert.

Neurophysiologisch wird konstatiert: „In sum, although somewhat inconsistently across studies, the OTS appears to be associated with regions of the posterior parietal and occipital cortices that do not appear to overlap with regions involved in the ANS. The electrophysiological signatures of the two systems also appear to be distinct” (Piazza, 2010, S. 545). Gemeinsam ist den beiden Repräsentationssystemen jedoch, dass sie den für Kernsysteme oben beschriebenen typischen Beschränkungen unterliegen: das Object-file System und das Analog-magnitude-System sind domänenspezifisch („one applies to objects, the other to sets”), sie sind aufgabenspezifisch („one allows for addition of one, the other allows for comparisons of sets”) und sie sind unabhängig („the situations that evoke one are different from the situations that evoke the other“) (Spelke, 2000, S. 1237).

Laut Xu und Spelke (2000) finden die beiden zunächst unabhängigen Kernsysteme zur Mengenrepräsentation über die Sprache und das Zählwissen eine Brücke zueinander, bis sie im weiteren Verlauf zu einer Begrifflichkeit für Zahlen werden. Auf diese Entwicklung wird im nächsten Kapitel genauer eingegangen.

1.2 Der Erwerb des Zahlbegriffs

Nach der Beschreibung des vorsprachlichen Mengenverständnisses in Form der beiden Kernsysteme soll nun dargestellt werden, wie sich der Erwerb des Zahlbegriffs in zunehmend komplexeren Verknüpfungen zwischen dem Mengenwissen und dem Zahlwissen und in Verbindung mit der Sprachentwicklung vollzieht. Kinder entwickeln anfänglich getrennt voneinander ein *nicht-numerisches* Mengenwissen und das Zählwissen. Erst wenn Zahlen dann in Beziehung zu korrespondierenden Mengen gebracht werden können, vollzieht sich die Integration zu einem *numerischen* Mengenbegriff. Dieser umfasst das ordinale und kardinale Verständnis der Zahlen und das Teile-Ganze-Verständnis.

Im Folgenden wird deutlich, dass sowohl der Erwerb der Zahlworte und das allmähliche Verstehen ihrer Bedeutungen als auch schließlich der numerisch präzise Umgang mit Quantitäten, sich nicht unmittelbar zwangsläufig aus den angeborenen Kernsystemen entwickeln. Carey (2001, 2009) verweist darauf, dass diese Entwicklung bestimmter Einsichten bedarf, die durch das sprachlich vermittelte, kulturell erarbeitete Zählsystem ermöglicht werden, und dass sich aus primitiven Konzepten komplexere konstruieren. Das bedeutet, Kinder lernen Konzepte separat und verbinden diese erst später durch nachfolgende Interpretationen („bootstrapping“; Carey, 2009, S. 306).

1.2.1 Entwicklung des nicht-numerischen Mengenwissens

Das *nicht-numerische* Mengenwissen wird ohne Zahlen auf Quantitäten beim Schätzen, beim Vergleichen und bei einfachen Operationshandlungen bezogen. Mit diesem Wissen können zwei Mengen über die 1-zu-1-Zuordnung verglichen, Veränderungen an Mengen global erkannt sowie benannt und erste Prinzipien des Teile-Ganze-Konzepts auf Mengen angewendet werden. Dabei benutzen Kinder keine Zahlworte, sondern Begriffe, wie „viel, wenig, mehr, weniger, gleich“.

Kinder sind mit diesem Wissen in der Lage, eine Menge gleichmäßig aufzuteilen oder zwei Mengen einander anzugleichen. Darüber hinaus sind sie auch zur Herstellung von Serien von Objekten fähig, das heißt, sie können kleine Mengen mit unterschiedlich vielen Objekten gerichtet in eine Reihenfolge bringen und hinsichtlich größer und kleiner bewerten (Fritz & Ricken, 2008).

1.2.1.1 Protoquantitative Schemata

Resnick (1992) spricht zu diesem Entwicklungszeitpunkt von protoquantitativen Schemata, wenn Quantitäten noch nicht mit numerischem Anzahlbezug beschrieben werden können: „comparisons of amounts are made and inferences can be drawn about the effects of various changes (…) on amounts, but no numerical quantification is involved“ (ebd., S. 403). Auf dieser protoquantitativen Ebene ist die Wahrnehmung an konkrete Objekte gebunden und die Schemata werden durch alltägliche Erfahrungen grundlegend aufgebaut. Resnick (1989, 1992) unterscheidet drei Arten von protoquantitativen Schemata, die sich intuitiv entwickeln:

- Mit dem Schema des Vergleichs („compare-schema“) erkennen Kinder bereits im Alter von 2 Jahren *Mengenvergleiche*. Sie können zwei Mengen nach ihrer Größe unterscheiden und sie mit den Begriffen „mehr“ und “weniger“ beurteilen.
- Durch das zweite Schema des Vermehrens/Verminderns („increase/decrease-schema“) verstehen und benennen Kinder ungefähr im Alter von 3 Jahren *Mengenveränderungen*. Sie begreifen diese als Prozess: etwas ist „mehr geworden“, wenn etwas hinzugefügt wurde oder „weniger“, wenn etwas fortgenommen wurde und es bleibt „gleich“, wenn nichts hinzugefügt bzw. weggenommen wurde:

  > „More advanced protoquantitative reasoning works on a mental representation of amounts of material and allows one to reason about the results of imagined increases and decreases in those amounts. Thus, protoquantitative reasoners can say that there will be more apples after mother gives each child some additional ones, or that some mice must have been removed if there are now less than before, without being able to look simultaneously at the objects in their before and after states.” (Resnick, 1992, S. 404).

- Das dritte Schema ist das protoquantitative Teile-Ganze-Schema („part-whole-schema“). Es wird mit etwa 4 Jahren ausgebildet und betrifft das Wissen über das Zusammenfügen sowie Zerlegen von Mengen ohne exakte Quantifizierung, welches Kinder aus ihren Alltagserfahrungen gewinnen, wenn sie begreifen, dass ein Objekt oder eine Menge in Stücke zerteilt werden kann und diese Stücke zusammengesetzt wieder dieselbe Menge ergeben, ohne dass sich an ihrer „Mächtigkeit“ etwas ändert. Es ist als ausgesprochen bedeutsame Grundlage anzusehen:

  > „The protoquantitative part-whole schema is the foundation for later understanding of binary addition and subtraction and for several fundamental mathematical principles, such as the commutativity and associativity of addition and the complementarity of addition and subtraction. It also provides the framework for a concept of additive composition of numbers that underlies the place value system.”(Resnick et al. 1991, S. 32)

1.2.1.2 Entwicklung des nicht-numerischen Teile-Ganze-Verständnisses

Kinder beginnen demgemäß, ein Teile-Ganze-Verständnis an konkreten Objekten ohne Bezug zu Numerositäten aufzubauen (Resnick, 1989). Baroody, Wilkins und Tiilikainen (2003, S. 142 f.) stellen in Verknüpfung mit den Theorien von Resnick (1992) und Huttenlocher, Jordan und Levine (1994) fünf Phasen der Entwicklung des Teile-Ganze-Verständnisses dar, bevor Kinder mit abgezählten Mengen numerisch präzise umgehen können:

- *pure qualitative reasoning* (Kinder erkennen, dass ein Ganzes aus Teilen besteht)
- *qualitative reasoning about inexactly estimated quantities* (ein Ganzes ist mehr als seine einzelnen Teile)
- *qualitative reasoning about exact but nonverbally represented quantities* (Teil und Teil ergeben zusammen „*some* larger whole“)
- *quantitative reasoning about exact but nonverbally represented quantities* (Teil und Teil ergeben zusammen „*the* larger whole“)
- *beginning of numerical or abstract reasoning* (erstes Verständnis für „eins“ und „zwei“ ergeben zusammen das Ganze „drei“).

Sophian und McCorgray (1994) fanden in Studien mit 4- bis 6-Jährigen heraus, dass Kinder früh sensibel für grundlegende Teile-Ganze-Beziehungen sind. Teile-Ganze-Kontextaufgaben erforderten von ihnen das Nennen ungefährer Zahlergebnisse und daher die Unterscheidung, ob es sich um eine additive oder subtraktive Operation handelt. Die Autoren stellten fest, dass *numerische* Teile-Ganze-Beziehungen noch nicht von den 4-Jährigen verstanden wurden. Auch im Alter von 5 Jahren erbrachten Kinder zunächst nur Antworten zur Endmenge und Startmenge, die in die richtige Richtung gingen. Das Berechnen präziser Ergebnisse fiel ihnen noch schwer, da ihr Mengenwissen, laut den Autoren, noch nicht mit Zählprozessen und arithmetischen Zusammenhängen verbunden ist. Dennoch bewiesen sie damit ein fundamentales Verständnis für die Teile-Ganze-Struktur der Aufgaben.

1.2.2 Entwicklung des Zählwissens

Unabhängig von der Entwicklung des soeben beschriebenen nicht-numerischen Mengenwissens bauen sich zeitgleich im Kontext der Sprachentwicklung ab dem 2. Lebensjahr die Fähigkeiten des Zählwissens auf. Das Zählen gilt als zentrales Moment in der mathematischen Entwicklung und als grundlegend für arithmetische Fähigkeiten (Carey, 2001;

Fuson, 1992; Gelman & Gallistel, 1978). „Das Zählen ist das Schweizer Taschenmesser des Rechnens, ein Werkzeug, das Kinder spontan für alle möglichen Zwecke nutzen. Mit Hilfe des Zählens finden fast alle Kinder ohne explizite Unterweisung Möglichkeiten, Zahlen zu addieren und zu subtrahieren.“ (Dehaene, 1999, S. 143).

> „Counting makes the first bridge from the child’s innate capacity for numerosity to the more advanced mathematical achievements of the culture into which she was born (…) Though it seems very to easy to us adults, learning to count takes about four years from two to six. Children start around two years old, progress in stages until 6 years old when they understand how to count and how to use counting in a near-adult manner” (Butterworth, 2005, S. 7)

Von den Anfängen des Zählerwerbs bis zur vollständigen Beherrschung des Zählens ist es demnach ein langer Weg, der im Folgenden umschrieben werden soll.

1.2.2.1 Bedeutung des Subitizings für die Entwicklung des Zählwissens

In den Befunden der Säuglingsforschung wurde deutlich, dass das Subitizing und das Zählen als zwei unterschiedliche Prozesse anzusehen sind: Das Subitizing ist auf das Wahrnehmen und Erkennen kleiner Mengen gerichtet und läuft schnell und ohne bewusste Anstrengung ab. Das Zählen, insbesondere größerer Mengen, ist fehleranfälliger und verläuft langsamer, seriell und unter bewusster Anstrengung (Dehaene, 1992; Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004). Inwiefern die Anfänge in der Entwicklung des Zählwissens dennoch in Beziehung zum Subitizing stehen und wie die beiden Prozesse miteinander in Verbindung stehen, wird nun erwogen.

Da Zählen als ein konzeptueller Prozess des Trennens und Verbindens von Einheiten gilt, werden die im Rahmen des Subitizings möglichen perzeptiven Kompetenzen als Grundlage für die Zählfähigkeiten angenommen (Mack, 2002): „Ohne die perzeptuelle Individuierung von Dingen und Eigenschaften (…) können diese durch Worte, insbesondere Zahlworte nicht benannt werden“ (ebd., S. 178). Dem Subitizing wird mithin eine wichtige Funktion beim Zählenlernen zugeschrieben (Cooper, 1984; Dehaene & Cohen, 1994). Die Annahme, dass das Subitizing *direkt* die Zählentwicklung beeinflusst, erscheint laut Mack (2002) dennoch nur wenig plausibel. Er schreibt dem Subitizing aber einen förderlichen Einfluss auf die Zählfähigkeiten zu, wenn Kinder damit anfänglich die Semantik der ersten Zahlworte verstehen lernen. Wird beispielsweise eine 3er-Gruppe immer mit dem Wort „drei” bezeichnet, kann das Kind generalisieren, dass Zahlworte dazu dienen, Gruppen als Einheiten zu bezeichnen und nicht Namen für einzelne Objekte sind. Auch nach von Glasersfeld (1982) und seiner Mustererkennungshypothese können kleine Kinder die

Zahlworte erst einmal in derart nominaler Bedeutung verwenden, als dass sie z. B. mit dem Wort „drei” zunächst nur eine bestimmte Mengenanordnung bezeichnen. Dem stimmen auch Gelman und Meck (1992) zu „(...) very young children are said to respond to numerical display by ‚subitizing’, by reciting a number word they have learned to associate with a given visual patterns” (ebd., S. 173). Im weiteren Entwicklungsverlauf kann dann diese Zahlwortverwendung als wichtiger Schritt angesehen werden, wenn verstanden wird, dass Zahlworte nicht nur Namen für bestimmte Mengenanordnungen sind, sondern auch eine Eigenschaft benennen, die später die Frage nach der Anzahl der Objekte beantwortet (von Glasersfeld, 1982). Diese indirekte Notation der ersten Zahlworte mit mentalen Vorstellungen kleiner Mengen wird auch von anderen Autoren angenommen (Carey, 2009; Le Corre & Carey, 2007). Fuson (1988) argumentiert ebenso, dass Subitizing den Erwerb von Zählfähigkeiten unterstützt. Sie nimmt an, dass Kinder allmählich bemerken, dass sie durch Zählen einer Menge mit „eins, zwei, drei” die gleiche Anzahl erhalten, als wenn sie dieselbe Menge durch das Subitizing erfassen. Es kann daher für die Entwicklung des Zählwissens festgehalten werden: „Part of the task of number development (...) is to discover that subitizing and counting yield information about the same thing” (Cooper, 1984, S. 188).

Über den Zusammenhang des Ablaufs der *Prozesse* des Subitizings und des Zählens herrscht noch Uneinigkeit in der Forschung. „Zählen ist nicht wie Subitizing auf kleine Numerositäten beschränkt, weswegen Zählen und Subitizing auf unterschiedliche Verarbeitungsebenen bezogen werden müssen: Subitizing auf die Ebene perzeptiver Segmentations- und Bindungsprozesse und Zählen auf die Ebene konzeptueller Analyse- und Syntheseprozesse“ (Mack, 2002, S. 141). Einige Autoren gehen von der Hypothese zweier deutlich voneinander unterscheidbarer kognitiver Prozesse aus (Kaufman, Lord, Reese & Volkmann, 1949; Mandler & Shebo, 1982; Peterson & Simon, 2000; Trick & Pylyshyn, 1993). Andere vertreten die Position, dass die Prozesse nicht unterschiedlicher Natur sind, sondern nur zwei verschiedene Ebenen auf einem Kontinuum der Schwierigkeit darstellen (Balakrishnan & Ashby, 1991, 1992). Nach Studien der Hirnforschung (Piazza, Mechelli, Butterworth & Price, 2002) sind das Subitizing und das Zählen auf neuronaler Ebene nicht als zwei qualitativ völlig unterschiedliche Prozesse, basierend auf zwei separaten Netzwerken, anzusehen, sondern als sich überlappende Prozesse, denen ein gemeinsames Netzwerk zugrunde liegt. „The results demonstrated a common network for subitizing and counting that comprises extrastriate middle occipital and intraparietal areas” (…)

„Subitizing does not seem to rely on a separate dedicated neural mechanism that is not also involved in counting” (Piazza et al., 2002, S. 435 und S. 442).

1.2.2.2 Zählprinzipien

Zum Zählen gehört laut Gelmans und Gallistels „counting principles theory“ (1978, S. 77 ff.) die Einsicht in fünf Zählprinzipien. Die Autoren sehen die Einsicht in bestimmte Zählprinzipien als angeboren und somit vorsprachlich als gegeben an („Principles-first“-Ansatz). Die ersten drei Zählprinzipien umschreiben die eigentlichen „how-to-count“-Prinzipien (Gelman & Gallistel, 1978, S. 80), die letzten beiden „what-to-count“ Prinzipien sind ihnen übergeordnet und umschreiben die Umstände ihrer Anwendung:

- Eindeutigkeitsprinzip (one-one principle): Jedem Element einer zu zählenden Menge wird genau ein Zahlwort zugeordnet.
- Prinzip der stabilen Ordnung (stable-order principle): Die Zahlwörter werden in einer festen, das heißt stets in gleicher, wiederholbarer Ordnung aufgesagt und werden den Objekten in dieser stabilen Reihenfolge zugeordnet.
- Kardinalwortprinzip (cardinal principle): Das letzte verwendete Zahlwort beschreibt die Anzahl der gezählten Objekte.
- Abstraktionsprinzip (abstraction principle): Die ersten drei Prinzipien können auf jede beliebige Menge von Objekten angewendet werden, unabhängig von deren Eigenschaften.
- Anordnungs-Irrelevanz-Prinzip (order-irrelevance principle): Das Zählen oder das Resultat des Zählens ist von der Anordnung der Objekte unabhängig. Es ist für das Zählergebnis irrelevant, welchem Objekt welches Zahlwort zugeordnet wird.

1.2.2.3 Phasen der Zählentwicklung

Die „Prinzipien-Vorher“-Theorie von Gelman und Gallistel, dass Kinder bereits über angebore Zählprinzipien verfügen und diese nicht erlernen müssen, gilt als widerlegt (Sophian, 1988; Fuson, 1988; Baroody, 1991; Wynn, 1990, 1992b; Bryant, 1997). Zustimmung findet hingegen die „Prinzipien-Nachher“-Theorie (vgl. Moser Opitz 2001, S. 69 ff.), die durch Fusons (1988) Modell zur Zählentwicklung grundgelegt wurde und von einem sukzessiven Erwerb der Zählfähigkeiten ausgeht. Fuson (1988) beschreibt, dass Zählen erlernt wird und sich die Einsicht in die Zählprinzipien erst durch Übungsgelegenheiten und Erfahrungen sowie durch kulturelle bzw. soziale Vermittlung im Alltag entwickelt (vgl. auch Carey, 2001; Mix, 2009; Resnick, 1989; Sophian, 1988). Auch Baroody (1991) stellt heraus, dass der Erwerb der Zahlwortreihe eine Gedächtnis- und Nachahmungsleistung ist und nicht auf angeborenen Prinzipien beruht. Mix (2002) belegte, dass Kinder im 2. und 3. Lebensjahr zum Beispiel die Fähigkeit zur Eins-zu-Eins-Zuordnung vor allem in Form von sozialen Interaktionen und in sprachlichen Kontexten erlangen. Der Weg vom reinen Zählakt bis zum Kardinalitätsverständnis ist demnach als längerer Entwicklungsprozess zu verstehen und wird von Fuson (1988; vgl. auch Fuson & Hall, 1983) in ihrem Modell zur Zählentwicklung beschrieben, das fünf Entwicklungsschritte umfasst, die jedoch nicht als starr linear angesehen werden sollen. In der nachstehenden Beschreibung dieses Modells tauchen numerische Fähigkeiten auf, die bislang noch nicht erörtert wurden. Sie werden aber im weiteren Verlauf der Arbeit thematisiert.

Phase I: Ganzheitsauffassung der Zahlwortfolge (String Level):
Einige Zahlworte können in einem undifferenzierten Wortgebilde („einszweidreivierfünfsechs") wie ein Gedicht aufgesagt werden. „At this stage counting is represented as an arbitrary, long sequence having a conventional order and which adults and other children seem to love to ask one to recite" (Fuson, Richards & Briars, 1982, S. 35). Objekte werden in dieser Phase noch nicht gezählt, denn das Eindeutigkeitsprinzip und die kardinale Bedeutung sind noch nicht vorhanden.
Phase II: Unflexible Zahlwortreihe (Unbreakable Chain Level):
Einzelne Zahlwörter werden nun voneinander differenziert. Die Zahlwortreihe wird aber als Einheit aufgefasst, daher ist das Zählen immer nur mit 1 beginnend möglich. Die Eins-zu-eins-Korrespondenz ordnet jedem Objekt eindeutig ein Zahlwort zu, so dass nun die Anzahl der Objekte einer Menge durch Auszählen ermittelt werden kann. Das letztgenannte Zahlwort wird auf die Frage „Wie viele sind es?" genannt (last-word-rule, Fuson, 1988). In dieser Phase sind einfache Additionen möglich, wenn die Objekte von zwei Mengen als Summe einfach nur ausgezählt werden müssen.
Phase III: Teilweise flexible Zahlwortreihe (Breakable Chain Level):
Die Zahlwortreihe kann von einer beliebigen Zahl aus vorwärts aufgesagt werden („count-up from *a*", „count up from *a* to *b*") (Fuson & Hall, 1983, S. 52). Nun wird, ca. ab einem Alter von 4,5 Jahren, der Zusammenhang zwischen Zahlwort und Kardinalwort verstanden. Dadurch dass die Startzahl als kardinale Einheit begriffen wird, werden effektivere Additions- und Subtraktionsrechnungen möglich. Beim Addieren müssen nun nicht länger jeweils bei 1 beginnend beide Summanden und dann die Gesamtmenge ausgezählt werden, sondern die Kinder zählen nur noch die zweite Menge hinzu. Vorgänger- oder Nach-

folgerzahlen können bestimmt werden, ebenso können die Zahlen, die zwischen zwei Zahlen liegen, benannt werden.

Phase IV: Flexible Zahlwortreihe (Numerable Chain Level):

Zahlwörter werden als zählbare Einheiten aufgefasst. Es kann von beliebigen Zahlen aus um eine bestimmte Anzahl an Schritten weitergezählt werden („count-up *n* from *a*“, Fuson & Hall, 1983, S. 53). Jede Zahl steht für die Menge seiner Objekte und jede Zahl umfasst die Anzahl der vorausgegangenen Zahlen. Dieses Verständnis erlaubt mit Hilfe des Hoch- und Herunterzählens („count-on“- bzw. „count-back“-Strategie, ebd.) additive und subtraktive Operationen zur Gesamtmenge und zu Austauschaufgaben mit einer fehlenden Teilmenge.

Phase V: Vollständig reversible Zahlwortreihe (Bidirectional Chain Level):

Es folgt die Phase der „zweiseitigen Durchlaufbarkeit“ der Zahlwortfolge. Das Vorwärts- und Rückwärtszählen ist letztlich schnell und flexibel möglich. Zahlbeziehungen werden zügig erkannt und beim Rechnen genutzt.

Typische Fehler beim Zählen

Bei dem phasenweisen Erwerb von Zählkompetenzen sind einige typische Fehlerarten zu beobachten (Fuson, 1988, S. 89 ff.): Kinder rezitieren anfänglich die Zahlworte zwar bereits in gleichbleibend stabiler Reihenfolge und verharren längere Zeit bei einer Reihenfolge, diese ist allerdings oftmals noch nicht korrekt (z. B. „eins, zwei, drei, fünf, sechs, sieben, acht“). Etwa im Alter von 3,5 Jahren setzen Kinder die Zahlwörter zum Zählen ein, es kommt bei den Zählhandlungen durch Antippen oder Zeigen aber noch zu Fehlern der Koordinierung zwischen Zeigen und Objekt oder zwischen dem Zahlwort und dem Zeigen (Fuson, 1988). Denn es laufen bei der Eins-zu-eins-Zuordnung zeitgleich zwei Prozesse ab: Zum einen muss beim Zählen in bereits gezählte und noch nicht gezählte Objekte eingeteilt werden (Partioning), zum anderen müssen Objekte beim Zuordnen mit Zahlwörtern gekennzeichnet werden (Tagging). Dabei kommt es vor, dass ein Objekt ausgelassen oder doppelt gezählt wird oder ein Zahlwort mehrfach benutzt wird. Hasemann (2007) spricht von der Phase des asynchronen Zählens. Laut Fuson (1988) treten Fehler häufiger beim Zählen von einander ähnlichen Objekten auf als bei Objekten unterschiedlichen Aussehens. Hasemann (2007, S. 8 f.) beschreibt, wie sich insgesamt zwischen 4 und 6 Jahren eine deutliche Entwicklung vollzieht: Wenn Kinder allmählich zunehmend Sicherheit beim Zählen erlangen, gelingt ihnen das *synchrone* Zählen und sie zeigen beim Zählen genau auf ein Objekt. Sie entwickeln gewisse Strategien, indem sie zum Beispiel beginnen, die Objekte während des Zählens zu ordnen, um sie besser zählen zu können. Sie schieben die Objekte zur Seite oder legen sie während des Zählens um. Mit dem *abkürzenden* Zählen können Kinder schließlich von einer beliebigen Zahl aus zählen und in Zweierschritten oder rückwärts zählen.

1.2.2.4 Bedeutung der Sprache für das Zähl- und Mengenwissen

Erst sprachliche Fähigkeiten erlauben, die begrenzte exakte Anzahlbestimmung kleiner Mengen derart auszuweiten, dass große Mengen zählend bestimmt werden können. Die Wichtigkeit der Sprache für die *numerisch präzise* Anzahlbestimmung einer Menge wird nun dargestellt.

Spelke und Tsivkin (2001a) sehen als Basis für die Ausbildung von numerischen Konzepten das Zusammenwirken von drei kognitiven Systemen an: das Analog-magnitude-System, das Objekt-file-System und das Sprachsystem stehen im Wechselspiel miteinander. Auf der Basis des non-verbalen Object-file-Systems ergibt sich in Verbindung mit dem Spracherwerb, zunächst das Verständnis der Bedeutung kleiner Zahlen. Mit der Sprachkompetenz wird zuerst das Wort „eins“ durch die Objekt-file-Repräsentation mit einem Objekt verbunden. Im Alter von ungefähr 2,5 Jahren wird dann die Bedeutung des Wortes „zwei" verstanden, wenn das Wort durch die Objekt-file-Repräsentation mit zwei Objekten entsprechend der 1-zu-1-Korrespondenz verbunden wird (Objekt-Objekt). Das Kind weiß zudem im Hinblick auf das Analog-magnitude-System, dass es sich dabei um eine sehr kleine Menge handelt. Es folgt das Verständnis der Zahl „drei“ (im Objekt-file-System: Objekt-Objekt-Objekt, im Analog-magnitude- System: eine Menge etwas größer als „zwei“). Laut Spelke und Tsivkin (2001a) ergibt sich die Bedeutung dieser kleinen Zahlen also aus den beiden non-verbalen Kernsystemen. Aufgrund der Kapazitätsgrenze des Object-file-Systems auf 3 Objekte, entwickeln sich aber Repräsentationen und exakte numerische Konzepte für *größere* Zahlen nur im Zusammenspiel mit dem Sprachsystem. Erst die Sprachfähigkeit ermöglicht dem Menschen, im Gegensatz zu den Tieren, größere Mengen präzise zählend zu bestimmen. Ebenso wie die Studie mit den Mundurukus (Pica, Lemer, Izard & Dehaene, 2004), die *exakte numerische* Aufgaben signifikant schlechter lösten als die französische Kontrollgruppe, zeigten auch Untersuchungen mit dem brasilianischen Volk der Pirahã, dass die Fähigkeit zur präzisen Anzahlbestimmung sprachbasiert ist (Gordon, 2004): Die Pirahã, die insgesamt nur drei Wörter für Zahlen in ihrem Sprachgebrauch haben, konnten zwar erfolgreich Mengen bis 3 präzise bestimmen, größere Mengen konnten sie jedoch nur durch Schätzen näherungsweise bestimmen. Die

Sprachunabhängigkeit gilt demzufolge nur für die Fähigkeit zur approximativen Bestimmung von größeren Mengen.

Spelke und Tsivkin (2001b) wiesen nach, dass auch das *exakte* Rechnen eng mit den Sprachfähigkeiten verbunden ist - das *schätzende* Rechnen gelingt hingegen mit der Angabe ungefährer Zahlergebnisse unabhängig von sprachlichen Prozessen. In ihrem Experiment sollten bilinguale Englisch- und Russischstudenten sowohl einerseits Rechenaufgaben exakt lösen, wie „Ist 53 plus 68 gleich 121 oder 127?“, als auch andererseits schätzen, ob das Ergebnis von 53 plus 68 eher bei 120 oder 150 liegt. Zunächst wurden die Studenten entweder auf Englisch oder auf Russisch instruiert. Danach wurden sie einerseits in derselben Sprache, in der sie instruiert wurden, getestet, andererseits wurde beim Testen zur anderen Sprache gewechselt. Die Reaktionszeiten für die Aufgaben zum approximativen Schätzen waren gleich, der Wechsel und somit die unterschiedliche Sprache spielte keine Rolle. Für die Aufgaben, die indessen exakte Lösungen erforderten, benötigten die Studenten jedoch länger, wenn die Sprache geändert wurde. Wurden die Studenten auf Englisch instruiert und auf Russisch getestet, antworteten sie weniger schnell. Die Art der exakten Zahlverarbeitung hängt somit nicht nur mit dem erlernten und abrufbaren Faktenwissen zusammen, sondern unterliegt auch sprachlichen Einflüssen.

1.2.3 Kopplung des nicht-numerischen Mengenwissens mit dem Zählwissen

Das Mengenverständnis und das Zählwissen werden also als zwei getrennte Schemata erachtet (Griffin & Case, 1997). Mit 4 Jahren ist diese Integration noch nicht vollzogen, „the two sets of knowledge were stored in different ‚files‘ on a computer, which cannot yet be ‘merged’” (ebd., S. 8). Im Folgenden soll genauer beschrieben werden, wie sie sich verbinden.

Durch die Verknüpfung von Zahlworten mit Mengenbegriffen erfolgt der Erwerb einer Mengenbewusstheit von Zahlen. Nachdem zunächst mit einem „unpräzisen Anzahlkonzept“ Zahlen nur groben Mengenkategorien zugeordnet werden können („zwei“ oder „drei“ stehen für wenig, „acht“ oder „zwanzig“ stehen für viel), wird es mit einem „präzisen Anzahlkonzept“ möglich, Zahlen größenmäßig genau voneinander zu differenzieren - wenn die Zahlwortkenntnisse mit dem Verständnis der Seriation exakt aufsteigender Quantitäten gekoppelt werden und das Kardinalverständnis gegeben ist (Krajewski & Schneider, 2006, S. 250 f.). Das Ordinalitätsverständnis und das Kardinalitätsverständnis müssen sich daher verbinden. Die Entwicklung dieser beiden Prinzipien wird nun näher betrachtet.

1.2.3.1 Entwicklung der Zahlenstrahlvorstellung

Für das Ordinalitätsverständnis ist der Erwerb einer Zahlenstrahlvorstellung erforderlich. Nach Siegler und Booth (2005) ist die Integration des globalen Mengenwissens und des Zählwissens zu einem mentalen Zahlenstrahl als ausgesprochen wesentlich für die mathematische Entwicklung im Grundschulalter zu erachten. Diese sogenannte „mental number line“ (Resnick, 1983) erlaubt, die Zahlwortreihe als Sequenz aufsteigender Zahlen und auf dieser Grundlage später auch als Sequenz aufsteigender Quantitäten zu verstehen. Auch eine erste zählende Anwendung der Zahlwortreihe auf simple Rechenoperationen wird dadurch möglich:

> „Another important learning master key is forming a mental number line. This requires the ability to visualise and abstract a number line so that you can order numbers by quantity, locate any given number along the number line, and generate any portion of the number line that may be required for problem solving. Children’s mental number lines continuously increase as they encounter and construct concepts of new numbers (e.g., millions, trillions, fractions and decimal fractions).” (Gervasoni, 2005, S. 126).

Die mental number line verknüpft sich mit den ersten beiden intuitiven protoquantitativen Schemata (Resnick, 1989, 1992): Wenn sich das protoquantitative „Vergleichsschema“ mit der Zahlwortreihe verbindet, sind präzise Größenvergleiche zwischen zwei Zahlen aufgrund ihrer ordinalen Positionen in der Zahlwortreihe möglich. Der Zahlenstrahl dient als Richtungsmarker und Zahlen werden als größer identifiziert, wenn sie in der Zahlwortreihe später kommen. Des Weiteren wird verstanden, welche beiden benachbarten Zahlen eine Zahl hat (vgl. auch Griffin, Case & Siegler, 1994). Im weiteren Verlauf integrieren sich das Zählwissen und das protoquantitative „Schema des Vermehrens und Verminderns“ (Resnick, 1992), wenn Kinder vorwärts und rückwärts zählend, entlang des mentalen Zahlenstrahls, einfache Rechenoperationen bewältigen. Bevor Kinder also symbolische Aufgaben verstehen oder diesbezügliche Instruktionen erhalten haben, lösen sie mit diesem integrierten Wissen erste simple kontextgebundene Additions- und Subtraktionsaufgaben (Fuson, 1992), indem sie diese mit konkreten Objekten repräsentieren. Sie zählen zwei kleine Teilmengen jeweils einzeln aus und zählen dann die gesamte Menge erneut („counting-all“-Strategie oder „count-from-first“-Strategie) (Briars & Larkin, 1984; Carpenter & Moser, 1983). Das Ergebnis ihrer Rechenhandlungen verstehen sie dabei noch nicht in seiner kardinalen Bedeutung.

Auf der Grundlage der zunächst rein ordinalen Vorstellung von einem mentalen Zahlenstrahl entstehen wichtige Voraussetzungen für das weitere Verständnis von Beziehungen zwischen Zahlen. In einer Studie von Huntley-Fenner und Cannon (2000) zeigten Fünfjährige, dass sie bereits über Repräsentationen eines linearen Zahlenstrahls verfügen. Ihnen wurden kurz kleine Mengenabbildungen mit 5, 7, 9 oder 11 Quadraten dargeboten, die sie auf einem 20er-Zahlenstrahl eintragen sollten. Es gelang ihnen, eine Verteilung der Markierungen auf dem Zahlenstrahl vorzunehmen, die proportional zur Anzahl der je präsentierten Quadrate war. Siegler und Booth (2005) wiesen bezüglich des Zusammenhangs zwischen Fähigkeiten zu korrekten Einschätzungen auf einem 100er-Zahlenstrahl und der mathematischen Leistungsfähigkeit signifikante Korrelationen bei Erst- und Zweitklässlern nach.

Ab einem Alter von 7 Jahren konstruieren Kinder komplexere Repräsentationen des Zahlenstrahls, die dann metrischer Art sind. Diese nutzen sie zum Beispiel beim Umgang mit unterschiedlichen Maßstäben für Zeit-oder Geldeinheiten sowie beim Zählen in Zweier- oder Fünfersprüngen oder beim Stellenwertverständnis von Einern und Zehnern (Case, 1992; Griffin, 2004). Die mentale Zahlenstrahlvorstellung ist darüber hinaus grundlegend für die Entwicklung des Konzepts des relationalen Zahlbegriffs: die Vorstellung von benachbarten Zahlen wird erweitert um das Verständnis, dass jede Zahl genau um eins mehr bzw. eins weniger ist als sein Vorgänger bzw. Nachfolger (Griffin, Case & Siegler, 1994).

1.2.3.2 Entwicklung des Kardinalitätsverständnisses

Im Zusammenhang mit dem Mengen- und Zählwissen ist neben dem Ordinalitätsverständnis die Kardinalität von ausgesprochen besonderer Bedeutung. Damit wird verstanden, dass Zahlen beschreiben, *wie viele* Elemente eine Menge enthält, und dass Zahlen somit die Quantität einer Menge angeben. Nach der Kardinalzahltheorie von Russel (1924) ist die Kardinalzahl die Klassenbezeichnung für alle gleichmächtigen Mengen: Zwei Mengen haben die gleiche Kardinalität bzw. sind gleichmächtig, wenn durch eine Eins-zu-Eins-Zuordnung jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet werden kann. Die gleiche Anzahl entspricht also der gleichen Zahl.

Wie vollzieht sich die Entwicklung zum kardinalen Verständnis der Zahlworte?

Kinder erhalten beim Erwerb ihrer kardinalen Vorstellungen zunächst Einsicht in die Bedeutsamkeit des *letzten* Zahlwortes: „Cardinality means that the last number word used in counting refers to the entire set of items and is thought to be crucial to correct counting"

(Bermejo, 1996, S. 263). Anfänglich gelingt das durch Nachahmung, erst nach und nach entdecken Kinder das zugrunde liegende, wesentliche Prinzip (Fuson, 1988; Wynn, 1990). Auch laut Frydman und Bryant (1988) wird das Kardinalitätsprinzip erst aus der Zählerfahrung erschlossen. In ihren Studien verfügten 5-jährige Kinder über das Kardinalitätsverständnis, 4-Jährige jedoch noch nicht. Selbst wenn Kinder zwar richtig zählen bzw. auch wissen, dass auf die Frage nach der Anzahl das letzte Zahlwort genannt werden muss, besitzen sie noch kein wirkliches Kardinalitätsverständnis (Sarnecka & Carey, 2008). Werden sie nach dem Zählen gefragt „Wie viele sind es", antworten sie zwar mit dem letzten Zahlwort, verstehen aber noch nicht, dass sie damit die Menge, die alle Objekte enthält, ermittelt haben. Sie beziehen es zum Beispiel nur auf das letzte Objekt und zeigen darauf „This ist the five cars" (Fuson, 1992, S. 63). Sie sehen in Zahlwörtern eher ein Art „Label", das zu einem Objekt gehört (Wynn, 1990). Das Verständnis, dass mit dem Zählen die Gesamtanzahl der Menge bestimmt ist, muss sich also noch integrieren (Fuson, 1988).

Ab wann und über welchen Zeitraum sich dieses kardinale Verständnis genau ausbildet, wird unterschiedlich diskutiert. Einigkeit herrscht darüber, dass die Kardinalität nicht intuitiv gegeben ist, wie von Gelman und Gallistel angenommen (1978), sondern dass sie sich sukzessiv entwickelt und Kinder die Kardinalität zunächst nur für die Bedeutung sehr kleiner Zahlen erwerben, bevor sie die Zählprinzipien für größere Mengen generalisieren können:

Wynn (1990) bezeichnet Kinder am Anfang ihres Zählprozesses als „Grabbers". Wenn sie zum Beispiel 3 Spielzeuge geben sollen, greifen sie aus einer Menge von vielen Spielzeugen lediglich wahllos eine Handvoll heraus und geben beliebig einige Spielzeuge. Diese Kinder wissen zunächst nur, dass Zahlworte eine Menge mit *mehr als einem* Objekt bezeichnen, aber sie haben sie noch nicht als Zählzahlen verstanden. Nach Wynn (1990, 1992b) und Le Corre und Carey (2007) begreifen Kinder, zumeist schon im Alter von 2,5 Jahren, die Bedeutung des Zahlwortes „eins", indem sie ein Objekt geben können. Im nächsten Schritt können sie 2 Objekte erfolgreich geben, dann sind sie etwa in ihrem dritten Lebensjahr fähig, 3 Objekte zu reichen („three"-knowers, Le Corre, Van de Walle, Brannon & Carey, 2006, S. 132). Es dauert ca. ein Jahr, bis Kinder zu einem sicheren Aus- und Abzählen von 4 Objekten gelangen, dann gelten die Zählprinzipien als erworben und Kinder können auch größere Mengen zählend bestimmen. Kinder gelten erst als richtige sogenannte „cardinal-principle-knowers", wenn sie 5 Objekte zuverlässig geben können (Le Corre & Carey, 2007; Sarnecka & Carey, 2008). In Fusons (1988) Längsschnittstudie benötigten Kinder ungefähr ein Jahr, bis sie zwischen „eins“ und „zwei“ unterscheiden konnten. Es dauerte wiederum ein Jahr bis zum Verständnis der Bedeutung von „zwei“ und „drei“. Mit der Einsicht in die Bedeutung des Zahlwortes „vier“ war dann schnell die Bedeutung höherer Zahlwörter gegeben. Im Alter von ca. 5 Jahren wissen Kinder in der Regel um die kardinale Bedeutung, dass die letztgenannte Zahl der Gesamtanzahl entspricht (Hasemann, 2007). Erst ab diesem Alter ist mit der verknüpften Vorstellung eine „single, super-ordinate conceptual structure for number“ (Griffin, 2004, S. 40) gegeben, die es mit dem beginnenden kardinalen Verständnis erlaubt, auch ohne konkrete Anschauung zu operieren.

1.2.3.3 Entwicklung des numerischen Teile-Ganze-Verständnisses

Im Zusammenhang mit der Kopplung des Mengen- und Zählwissens und dem Erwerb eines umfassenden Zahlbegriffs ist die Entwicklung des Teile-Ganze-Konzepts von hoher Bedeutung. Wenn sich das Zählwissen mit dem protoquantitativen Teile-Ganze-Schema verbindet, werden Teile-Ganze-Beziehungen mit Zahlen darstellbar und um das *numerische* Verständnis erweitert: „As children apply their counting skills in situations that earlier were reasoned about only protoquantitatively, (…) the part/whole schema becomes quantified“ (Resnick, 1992, S. 408).

Für Resnick (1983) gilt das Teile-Ganze-Konzept als die größte mathematische Errungenschaft der ersten Schuljahre schlechthin: „Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships“ (ebd., S. 114). Das Teile-Ganze-Konzept legt fest, dass jede Menge zerlegt werden kann und die Summe der Teilmengen äquivalent zur Gesamtmenge ist (Fuson, 1992), was impliziert, Teile bilden das Ganze oder sind darin inbegriffen. Laut Gerster & Schultz (2004) wird es mit dem Begreifen dieser elementaren Beziehungen möglich, die Addition als die Zusammenfassung der Teilproportionen und die Subtraktion als das Abgrenzen einer bekannten Teilproportion von einem Ganzen zu verstehen - wesentlich ist zudem das Schlüsselkonzept, Mengen als trennbare Quantitäten aufzufassen, wie die 6 setzt sich zusammen aus 3 und 3, aber auch aus 5 und 1 oder 4 und 2.

Die Entwicklung des numerisch präzisen Teile-Ganze-Verständnisses legt Resnick (1992, S. 403 f.) wie folgt dar - der oben beschriebenen konkreten ersten protoquantitativen Ebene der *Mathematics of protoquantities* (*reasoning about amounts of physical materials* *before verbal counting*) folgt die Entwicklung drei abstrakter Ebenen, die numerisch präzise sind:

- Auf der zweiten Ebene der *Mathematics of quantities (counting-based reasoning about numbers*) sind im Vorschulalter additive und subtraktive Rechenoperationen in bestimmten Kontexten möglich (adding 2 more cookies to 3 cookies makes 5 cookies).
- Auf der nächsten Ebene der *Mathematics of numbers (reasoning about numbers in the abstract)* wird im Schulalter der symbolische Umgang mit Zahlen (3 + 2) zunehmend systematisch möglich.
- Auf der letzten Ebene der *Mathematics of operators* (*generalizing about numerical relations*) werden generelle arithmetische Prinzipien, z. B. die Kommutativität oder die Inversion von Addition und Subtraktion, verstanden.

Die lange Entwicklung zwischen dem Erwerb und der Anwendung des Konzepts in numerisch präzisen Kontexten weist darauf hin, dass es hier nicht einfach um die Verbindung des protoquantitativen Schemas mit Zahlen geht.

Mit Modellen zur Addition und Subtraktion und zum Lösen von Textaufgaben lässt sich die Entwicklung näher spezifizieren. Es wird angenommen, dass sich das numerische Teile-Ganze-Verständnis aus der durch Handlung gestützten Repräsentation der Addition und Subtraktion als Zähloperation entwickelt (Briars & Larkin, 1984; Riley & Greeno, 1988). Das bedeutet, Kinder nutzen ihre Zählfähigkeiten zunächst, um einfache Textaufgaben zählend zu lösen und entwickeln in diesen Kontextsituationen Einsichten in die Addition und Subtraktion (De Corte & Verschaffel, 2006; Fuson, 1992). Laut Briars und Larkin (1984) können Vorschulkinder zunächst Textaufgaben mit unbekannter Endmenge numerisch präzise mit Zahlen lösen. In Untersuchungen von Sophian und McCorgray (1994) war zwischen dem 5. und 6. Lebensjahr ein erheblicher Zuwachs an Fähigkeiten zum Finden präziser Lösungen zu semantisch eingekleideten Teile-Ganze-Aufgaben zu verzeichnen. Auch Pepper und Hunting (1998) wiesen nach, dass 5-jährige Kinder einfache additive und subtraktive Textaufgaben erfolgreich lösen konnten, wenn sie bildlich mit sichtbaren Mengen präsentiert wurden. Dabei verwenden Kinder die oben beschriebene „Counting-all-Strategie“ bzw. die „Counting-from-first-Strategie“ (vgl. auch Butterworth, 2005). Auch Aufgaben mit einer *nicht sichtbaren* Teilmenge konnten Kinder bewältigen: Ihnen wurde ein Bild von einem Bauernhof gezeigt, auf dem 6 Hasen sichtbar waren, 3

Hasen waren im Stall versteckt und nicht zu sehen. Auf die Frage nach der Gesamtanzahl der Hasen, vermochten sie die versteckte Menge mental zu repräsentieren und dann um die Anzahl der sichtbaren Menge weiterzuzählen (Pepper & Hunting, 1998). Möglich ist dieses fortgeschrittene „Weiterzählen vom ersten Summanden“ („counting-on“-Strategie) (Fuson, 1992) nur in Verbindung mit dem Anzahlverständnis. Erst mit dem Kardinalitätsprinzip beginnt das Verstehen, dass der erste Summand als Teilmenge in der Summe enthalten ist. Das wird sichtbar, wenn der erste Summand als kardinale Einheit eingebettet in das Ganze verstanden wird und der zweite Summand aufgezählt werden kann (Fuson, 1988). Mit zunehmendem Alter und dem verknüpften Mengen- und Zählwissen gelangen Kinder also zu effizienteren Strategien und mühselige Counting-all-Strategien werden ersetzt (Baroody, 1999; De Corte & Verschaffel, 2006). Mit der fortgeschrittenen „Counting-on-from-larger-Strategie“ können Kinder dann zum Beispiel den größeren Addenden voranstellen und um den kleineren weiterzählen. Wenn mit der Kommutativität verstanden wird, dass es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Addenden summiert werden, ist eine wichtige Teile-Ganze-Beziehung verstanden (Butterworth, 2005).

Das Teile-Ganze-Prinzip bezieht sich nicht nur auf das Zerlegen eines Ganzen in seine Teile, sondern ebenso auf die Zerlegbarkeit *einzelner* Teilmengen. Kinder, die Teile-Ganze-Beziehungen nutzen, finden verschiedene Zerlegungen einer *Teilmenge* schneller und können effektivere Rechenstrategien nutzen. Dann zerlegt das Kind bei der Aufgabe 8 + 5 die Teilmenge 5 und rechnet auf einfacherem Weg erst die 2 und dann die 3 hinzu (Baroody, 2006; Gerster & Schultz, 2004; Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988). Insgesamt ist festzuhalten, dass der Erwerb des Teile-Ganze-Konzepts der Meilenstein ist, der es Kindern erlaubt, flexibel mit mathematischen Problemen umzugehen, indem die Strukturen von verschiedenen Additions- und Subtraktionshandlungen in Teilen und dem Ganzen interpretiert werden können (Briars & Larkin, 1984; Riley & Greeno, 1988). Ausführlicher wird auf die Aspekte des Teile-Ganze-Konzepts noch in Kapitel 4.1.1 eingegangen.

1.3 Zusammenhang zwischen Kernsystemen und arithmetischen Fähigkeiten

Wurden bis zu diesem Punkt die beiden non-verbalen Kernsysteme und die von verbalem Wissen abhängigen Konzeptentwicklungen dargestellt, soll nun noch erörtert werden, ob und inwiefern die Kernsysteme als kognitive Grundlagen nachfolgende mathematische Fähigkeiten beeinflussen. Neuropsychologische Studien (Butterworth, 1999; Dehaene, 1997; Gallistel & Gelman, 2000) legen nahe, dass das quantitative Kernwissen als Basis für späteres mathematisches Wissen anzusehen ist. Auch nach Geary (1995, 2000) gehen spätere numerische Fähigkeiten, wie Zählfähigkeiten, ein erstes ordinales Verständnis sowie einfache arithmetische Leistungen mit kleinen Anzahlen auf biologisch primäre Fähigkeiten zurück. Diesbezüglich bestehen zahlreiche Vermutungen, aber letztlich wird die Bedeutung der Kernsysteme in der Forschung noch diskutiert.

1.3.1 Das Analog-magnitude-System in seiner weiteren Entwicklung

Fest steht, dass das Analog-magnitude-System im Laufe der Entwicklung vom Kleinkind- zum Erwachsenenalter deutlich an Präzision zunimmt (Halberda & Feigenson, 2008; Pica, Lemer, Izard, & Dehaene, 2004; Xu & Spelke, 2000). Dabei ist entscheidend, welche *numerische Distanz* die beiden zu vergleichenden Mengen aufweisen: ein Vergleich zweier Mengen gelingt umso schneller und zuverlässiger, je größer ihr Anzahlunterschied ist. Man spricht vom Weberschen Gesetz (Fechner, 1860):

> „This limit can also be described as a Weber fraction that measures the smallest numerical change to a stimulus that can be reliably detected. The Weber fraction is equal to the difference between the two numbers divided by the smaller number; for example, 7:8 → (8-7)/7 = .14." (Halberda & Feigenson, 2008, S. 1457).

Betrachtet man noch einmal obige Säuglingsbefunde wird der Webersche Effekt deutlich: 6 Monate alte Kinder konnten Mengen im Verhältnis 1:2, 9 bis 12 Monate alte Kinder im Verhältnis 2:3 unterscheiden (Libertus & Brannon, 2010; Lipton & Spelke, 2003; Xu & Spelke, 2000). Diese Grenzen des approximativen Kernsystems für die jeweils feinsten möglichen numerischen Unterscheidungen von Mengen wurden von Halberda und Feigenson (2008) für 3-bis 6-jährige Kinder und Erwachsene genauer untersucht. Es zeigte sich, dass die 3-Jährigen Mengen in einem Verhältnis von 3:4, die 4-Jährigen im Verhältnis 4:5, die 5- und 6-Jährigen im Verhältnis 5:6 und Erwachsene im höchsten Fall im Verhältnis von 10:11 unterscheiden konnten. Andere Studien zur Anzahldiskriminierung mit Erwachsenen zeigten, dass die Proportionalität zwischen zwei größeren Punktmengen weiterhin eine wichtige Rolle spielt: 40 von 60 Punkten bzw. 20 von 30 Punkten (2:3-Verhältnisse) wurden leichter voneinander unterschieden als 40 von 50 Punkten (Barth, Kanwisher & Spelke, 2003).

Die Ausschärfung des approximativen Kernsystems ist nach De Smedt et al. (2009) als relevant für die weitere mathematische Entwicklung zu erachten. Die Bedeutung des Weberschen Effekts belegten sie in ihren Studien, indem sie zeigten, dass der Ausprägungsgrad der numerischen Distanz zu Beginn des ersten Schuljahres eine prädiktive Aussage über die arithmetischen Leistungen zu Beginn des zweiten Schuljahres zuließ.

1.3.2 Einfluss des Analog-magnitude-Systems

Studien bestätigen die Wichtigkeit des approximativen Kernsystems beim Erbringen mathematischer Leistungen (vgl. Booth & Siegler, 2006; Jordan, Kaplan, Locuniak & Ramineni, 2007). Einen Zusammenhang zwischen approximativen Fähigkeiten zur Mengenverarbeitung (ANS) und arithmetischen Leistungen wiesen Halberda, Mazzocco und Feigenson (2008) nach. In ihrer Längsschnittstudie erfassten sie jährlich die mathematischen Leistungen von Kindern regelmäßig vom Kindergarten bis zur sechsten Klasse mit standardisierten Tests. Die Leistungen der Kinder wurden dann erneut im Alter von 14 Jahren beim schnellen Vergleich von zwei gleichzeitig, für sehr kurze Zeit präsentierten, größeren Punktmengen erhoben. Die diesbezüglichen Leistungen des Analog-magnitude-Systems korrelierten mit den aktuellen mathematische Leistungen der Neuntklässler und ihren Leistungen aus den Vorjahren und es gab dementsprechend große individuelle Unterschiede in den approximativen Fähigkeiten zur Anzahlverarbeitung bei den Jugendlichen. „Our results show that individual differences in achievement in school mathematics are related to individual differences in the acuity of an evolutionarily ancient, unlearned approximate number sense" (ebd., S. 665). ANS-Fähigkeiten erklärten bei Drittklässlern je nach Messverfahren 28 % bis 32 % der Varianz in der mathematischen Leistung. Die Autoren schussfolgern auf eine prädiktive Bedeutung der Fähigkeiten des Approximate-Number-Systems "(…) the ANS may have a causal role in determining individual maths achievement" (ebd., S. 667). Untersuchungen von Arndt et al. (2013) mit Erstklässlern ergaben auch einen Zusammenhang, stellten hingegen nach einer Erhebung ein Jahr später fest, dass das approximative System nicht die arithmetischen Leistungen vorhersagte.

Für welche Fähigkeiten ist das Analog-magnitude-System von Bedeutung?

Das Analog-magnitude-System scheint vor allem grundlegend für schätzende Größenvergleiche von Mengen sowie auch Zahlen und für das überschlagende Rechnen zu sein. Eine Interventionsstudie mit Erstklässlern hat gezeigt, dass der Aufbau approximativer Repräsentationen erfolgreich förderbar ist (Obersteiner, 2012). Die Fördereffekte waren allerdings spezifisch, das heißt, Effekte der spezifischen approximativen Förderung auf *arithmetische* Leistungen waren zwar im Vergleich zu einer Kontrollgruppe nachweisbar, jedoch nur mit geringen Effektstärken. Es ergaben sich hingegen deutlich positive Wirkungen auf die direkt geförderten approximativen Fähigkeiten zum schätzenden Vergleich von Punktmengen und zum Überschlagsrechnen sowie auf die Fähigkeiten zum symbolischen Zahlvergleich.

Das Analog-magnitude-System scheint demzufolge einen Einfluss auf die Fähigkeiten zum *symbolischen Zahlvergleich* zu nehmen (vgl. auch Wilson, Dehaene, Dubois & Fayol, 2009). Auch für Szücs und Goswami (2007) ist die fortschreitende Ausschärfung des Analog-magnitude-Systems nicht nur fundamental für die Fähigkeit, Mengen, sondern auch *Zahlen* klarer voneinander zu unterscheiden. Dabei ist wiederum - ähnlich wie bei der beschriebenen Proportionalität der Punktmengen - der *Distanzeffekt* von entscheidender Bedeutung. Er besagt, dass zwei Zahlen nach ihrer Größe umso schneller und leichter verglichen werden können, je größer ihre numerische Distanz ist (Moyer & Landauer, 1967). Eine Studie mit Kindern des ersten bis dritten Schuljahres und mit Erwachsenen (van Galen & Reitsma, 2008) zeigte, dass enger beieinander liegende Zahlen mit steigender Kompetenz nach ihrer Größe schneller und sicherer voneinander unterschieden werden können und der Distanzeffekt bereits im zunehmenden Schulalter kleiner wird: „this study with 7-, 8-, and 9-year-olds shows that from the age of 7 years onward, children represent information about number magnitude in a similar way as do adults, and that from the age of 9 years onward, children have direct access to this number magnitude information when perceiving Arabic numerals" (ebd., S. 111). Holloway und Ansari (2009) fanden bei 6- bis 8-Jährigen einen Zusammenhang zwischen dem Distanzeffekt und mathematischen Leistungen: „In a correlational analysis, we found that the individual differences in the distance effect were related to mathematics achievement (…). This relationship was found to be specific to symbolic numerical comparison" (ebd., S. 17).

Dehaene (1997) führt den Distanzeffekt auf das Approximate-Number-System zurück: Im Modul für die analoge Repräsentation von Größen wird die größenmäßige Bedeutung von Zahlen auf einem mentalen Zahlenstrahl in räumlich linearer Anordnung erfasst. Dieser innere Zahlenstrahl als Eigenschaft der analogen Repräsentation bildet die Grundlage für Zahlenvergleiche, wobei zwei Zahlen mit größeren numerischen Distanzen deutlich schneller benannt werden können. Auch wenn sich bei der Unterscheidung der Zahlen 5 und 6 kein Erwachsener den Zahlenstrahl konkret vorstellt, wird davon ausgegangen, dass sein Prinzip in unbewussten kognitiven Prozessen greift. „The distance effect is consistent with the interpretation that humans represent numbers on a mental number line because close numbers are more difficult to dissociate than are numbers further apart. (…) the distance effect is often seen as a marker for having automatic access to number magnitude information" (van Galen & Reitsma, 2008, S. 102 f.). Folgt man Dehaenes (1997) Ausführungen, kann das approximative Kernsystem mit der mentalen Zahlenstrahlvorstellung als Basis für höheres Zahlenwissen verstanden werden.

Laut Piazza (2010) ist dem Analog-magnitude-System eine höhere Bedeutung für späteres symbolisches numerisches Wissen beizumessen als dem Object-file-System (OTS), auch wenn sie diesbezüglich weiteren Forschungsbedarf einräumt:

> „Humans are born with strong intuitions on approximate numerical quantities and their relations. There is evidence to suggest that culture-based acquisition of symbols representing exact numerical quantities is grounded on these pre-existing intuitions, whereas there is little evidence for a foundational role of the parallel individuation system (…). However, despite the current evidence suggesting the ANS rather than the OTS is foundational in the construction of symbolic numerical thinking, there is a need for behavioral and neuroimaging data that would clarify the nature of the cognitive and neural changes occurring during the crucial period when children acquire the fist symbolic numbers and learn the counting principles." (ebd., S. 549 f.).

1.3.3 Einfluss des Object-file-Systems

Es wurde bereits diskutiert, dass das Object-file-System in Bezug auf die Erstellung von Eins-zu-eins-Zuordnungen und für die Zählentwicklung von Bedeutung ist. Als basale Fähigkeit, die mit dem Object-file-System in Verbindung steht, wurde dabei das Subitizing angesehen. Falls dem Object-file-System also eine Bedeutung für weitere numerische Fähigkeiten zukommen sollte, muss der Zusammenhang vor dem Hintergrund des Subitizings betrachtet werden.

1.3.3.1 Einfluss des Subitizings

Dass Fähigkeiten zum Subitizing mit arithmetischen Leistungen korrelieren, wiesen McCandliss et al. (2010) für Schulkinder der ersten bis fünften Klasse nach (vgl. auch Arndt et al., 2013). Auch Untersuchungen mit rechenschwachen Kindern legen einen Zusammenhang zwischen der Fähigkeit des Subitizings und arithmetischen Fähigkeiten nahe: Koontz und Berch (1996) fanden heraus, dass rechenschwache Kinder selbst noch im Alter von 10 Jahren Probleme mit dem Subitizing hatten; sie zählten Punktmengen bis drei ab. Das belegte auch eine Studie von Landerl, Bevan und Butterworth (2004) mit 8- und 9-jährigen Kindern. Darin zeigten die rechenschwachen Kinder deutlich längere Reaktionszeiten beim Benennen von 1 bis 3 gleichzeitig präsentierten Punkten als die normal entwickelten Kinder, die scheinbar simultan die kleinen Punktmengen wahrnehmen konnten, während die rechenschwachen Kinder zählen mussten. Das Subitizing könnte auch als ein Prädiktor für arithmetische Fähigkeiten betrachtet werden: Weichbrodt (1994) stellte mit der Blitz-Blick-Methode fest, dass Kinder, die zu Schulbeginn keine Menge mit mehr als drei Elementen unmittelbar erfassen konnten, später große Probleme im Mathematikunterricht hatten. Auch Desoete und Grégoire (2006) wiesen für Kinder mit Schwächen im Subitizing ein Jahr vor Schulbeginn nach, dass diese im ersten Schuljahr überdurchschnittlich häufiger schwächere Mathematikleistungen zeigten.

Ein direkter oder bedeutender Einfluss des Object-file-Systems auf höhere arithmetische Fähigkeiten wird jedoch angezweifelt. Im Rahmen ihrer Studie zum Subitizing und zum Zählen kamen Piazza, Mechelli, Butterworth und Price (2002) zu dem bereits oben erwähnten Schluss, dass es sich bei den beiden auf neuronaler Ebene um einander überlappende Prozesse handelt. Nicht zuletzt darauf basierend, gibt Piazza (2010) bezüglich des Einflusses des Object-file-Systems (OTS) auf höhere numerische Kompetenzen zu bedenken: „It is difficult to understand how a system that often interferes with numerical tasks might be relevant for learning more complex numerical representations (…). In sum, current data do not strongly support a foundational role of OTS in symbolic number acquisition" (ebd., S. 549).

1.3.3.2 Quasisimultanes Erfassen von größeren Anzahlen

Da das Subitizing grundlegend für die Fähigkeit zum *quasisimultanen* Erfassen von größeren Anzahlen ist, soll darauf abschließend noch eingegangen werden.

Die Spanne des Subitizings steigt im Laufe der Entwicklung an - von 1 bis 3 Elementen im Säuglingsalter auf 1 bis 4 Elemente im dritten Lebensjahr, bis hin zu 5 Elementen ab einem Alter von 4 Jahren (Starkey & Cooper, 1995). Ab einer Anzahl von 5 Elementen muss entweder gezählt werden oder aus der Simultanerfassung entsteht eine abgeleitete Strategie - die quasisimultane Anzahlerfassung. Dabei handelt es sich um eine gegliederte Mengenerfassung. Dadurch kann zum einen die Anzahl einer *einzelnen* Menge, die als strukturiertes Muster dargestellt ist, aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden, zum anderen können auch *mehrere simultan erfassbare* Mengen rasch zusammengefasst und rechnend verarbeitet werden (Gerster & Schultz, 2004). Die Fähigkeit, mehrere Objekte, die als überschaubare Einheiten mit simultan erfassbarer Anzahl gruppiert dargestellt sind, überblickend zu erfassen, wird auch als Groupitizing bezeichnet (McCandliss et al., 2010). Die strukturiert dargebotenen Einheiten werden dabei als Chunks wahrgenommen.

McCandliss et al. (2010) haben Studien zum Groupitizing durchgeführt. Sie präsentierten Kindern der ersten bis fünften Klasse 6 und 9 Punkte in Form von Drei-Punkte-Clustern.

Bei den älteren Schulkindern bestand ein Zusammenhang zwischen dem Groupitizing und der mathematischen Leistungsfähigkeit. Die Fähigkeit zum Groupitizing korrelierte erwartungsgemäß hoch mit der Fähigkeit zum Subitizing. In der erwähnten Längsschnittstudie von Arndt et al. (2013) mit den Erstklässlern stellte sich das Groupitizing, im Gegensatz zu den approximativen Fähigkeiten, als ein Prädiktor für arithmetische Leistungen heraus.

Dass die Mengenstrukturierung eine schnelle Anzahlbestimmung selbst noch im Erwachsenenalter erleichtert, zeigten Piazza, Mechelli, Butterworth und Price (2002). Sie führten mit Erwachsenen Versuche zum Anzahlbereich 6 bis 9 durch. Die Mengen wurden visuell unterschiedlich präsentiert: zum einen in ungeordneter Verteilung, zum anderen in leicht erkennbarer geometrischer Anordnung. Waren die Punkte *ungeordnet* verteilt, mussten die Erwachsenen bei 6 bis 9 Punkten zählen. Waren die Punktmengen hingegen räumlich geordnet, waren die Reaktionen der Probanden deutlich schneller. Die vorgegebene Strukturierung der Punkte verhalf demzufolge zu einer schnelleren Anzahlbenennung.

Hier sei betont, dass es sich beim Groupitizing jedoch nicht um reine Leistungen des Object-file-Systems handelt. Denn es setzt das Verständnis des kardinalen Prinzips voraus: Werden zum Beispiel 20 Objekte in einer 4 x 5er-Gruppierung angeordnet, kann nur unter der Voraussetzung eines gegebenen Anzahlverständnisses mit den Einheiten *gerechnet* werden: 5 + 5 + 5 + 5 oder 4 x 5. Es soll aber festgehalten werden, dass das Object-file-System über das Subitizing einen Grundstein für das Erkennen von strukturierten Mengenvorstellungen zu legen scheint und damit eine wichtige Basis für Rechenstrategien und für das Verständnis des Teile-Ganze-Konzepts schaffen kann. Die Fähigkeit, Teilmengen gedanklich zusammenzufassen, ist für Kinder laut Gerster und Schultz (2004) vor allem für das nicht-zählende Erkennen der Anzahlen 6 bis 10 von großer Bedeutung ist. Mit der quasisimultanen Erfassung oder genauer mit der Verwendung von mentalen Vorstellungsbildern soll das Ablösen von rein zählenden Strategien erfolgen, so dass Kinder zu flexibleren Rechenstrategien gelangen können (vgl. auch Krauthausen & Scherer, 2007).

1.4 Entwicklungsmodell zum Rechnen Lernen nach Fritz und Ricken

Im Folgenden wird zum Abschluss ein empirisch bestätigtes Modell von Fritz und Ricken (2008) (vgl. auch Fritz, Ehlert & Balzer, 2013; Ricken, Fritz & Balzer, 2011) zur Entwicklung des Rechnen Lernens bei 4- bis 8-jährigen Kindern dargestellt, welches die maßgeblichen numerischen Konzepte für das arithmetische Verständnis und ihren Aufbau umfasst. Das Modell stützt sich auf eine Vielzahl von theoretischen Annahmen und empirischen Befunden (z. B. Fuson, 1988, 1992; Piaget & Szeminska, 1965; Resnick, 1989, 1992; Steffe & Cobb, 1988; Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988; Stern, 1998; Wynn, 1990, 1992a), die für die Entwicklung von frühen numerischen Fähigkeiten bis zum Erwerb eines vollständigen Zahlbegriffs als zentral anzusehen sind, und führt diese zu einer Entwicklungsfolge zusammen. Die Modellierung folgt dem entwicklungspsychologischen Ansatz und bildet in fünf systematisch aufeinander aufbauenden Niveaus den schrittweisen Erwerb von arithmetischem Wissen ab, wobei die Konzepte allmählich abstrakter und zunehmend elaborierter werden.

Grundlegend wurde dabei angenommen, dass Kompetenzen in einem Wissensbereich ein Kontinuum bilden, auf dem sie sich in Abstufungen einordnen und als Niveaus unterscheiden lassen. Die Niveaus eines Kompetenzstufenmodells sind jeweils durch ein bestimmtes Konzept bzw. durch „kognitive Prozesse und Handlungen von bestimmter Qualität“ (Klieme et al., 2003, S. 15) gekennzeichnet, die Aussagen über die spezifischen Strukturen mathematischer Kompetenz und über ihre Komponenten ermöglichen (ebd., S. 74). Ein derartig hierarchisches Entwicklungsmodell erlaubt es demnach, die Leistung eines Kindes einem bestimmten Niveau zuzuordnen und auf der Grundlage festzustellen, welche Konzepte das Kind bereits erworben hat.

Einsichten sowie Kompetenzen werden zwar sukzessiv erreicht, in etwa wird dabei jährlich die Entwicklung eines Niveaus angenommen, Konzepte lösen einander jedoch nicht sofort ab, sondern werden teilweise noch parallel verwendet. Die fünf Entwicklungsniveaus werden nun ausführlich vorgestellt.

1.4.1 Niveau I: Zahlen als Zählzahlen

Zuerst entwickeln sich Fähigkeiten zur Beherrschung der Zahlwortreihe. Kinder beginnen im Alter von zwei bis drei Jahren die Zahlwortreihe zu erlernen, wobei Sequenzen der Zahlwörter als zusammenhängendes Gebilde von Wörtern (einszweidreivierfünf) aufgesagt werden. Die einzelnen Wortteile sind noch nicht bewusst trennbar und auch die Zahlen sind ohne spezifische numerische Bedeutung. Fuson (1988) beschreibt diese Entwicklung auf ihrer Stufe des „string levels“, wenn Zahlen noch nicht zum Zählen von einzelnen Objekten angewendet werden können. Kinder im Alter von unter dreieinhalb Jahren antworten auf die Frage „Wie viele sind es?“ nicht mit einer einzigen Zahl, sondern sagen die Zahlwörter auf („eins, zwei, drei, vier...“). Auch bei nochmaligen Nachfragen nach der Anzahl sagen sie erneut die ganze Zahlsequenz auf und antworten nicht mit einem einzigen Zahlwort (Fuson, 1988).

Allmählich wird die Zahl zur Zählzahl, wenn jedes Zahlwort genau nur einem Objekt zugeordnet wird (Fuson, 1988; Steffe & Cobb, 1988). Mit dieser Eins-zu-eins-Zuordnung, auch von Gelman und Gallistel (1978) als wesentliches Zählprinzip beschrieben, können kleine Mengen, jedoch nur anhand von konkreten Objekten, ausgezählt werden. Das gelingt nach und nach für bis zu drei Objekte - sobald dann 4 bzw. 5 Objekte sicher ausgezählt werden können, gilt dieses Zählprinzip als erworben und es kann auf größere Mengen angewendet werden (Wynn, 1990, 1992b; Le Corre et al., 2006; Sarnecka & Carey, 2008). Gleichzeitig führen Erfahrungen und Beobachtungen die Kinder dazu, dass auf die Frage „Wie viele sind es?“ das letzte Zahlwort wiederholt werden muss. Kinder haben zu diesem Zeitpunkt allerdings noch nicht verstanden, dass sie mit der letztgenannten Zahl die *Anzahl* aller Elemente der Menge bestimmt haben (Le Corre et al., 2006).

Nach diesem *Auszählen* von kleinen Mengenkollektionen sind Kinder im nächsten Schritt in der Lage, aus einer größeren Menge von Objekten heraus eine bestimmte Anzahl, also eine Teilmenge, *abzuzählen*: Es gelingt Kindern, frühestens ab einem Alter von ca. 3,5 Jahren, nach der Aufforderung „Gib mir 5!“, fünf Objekte aus einer Menge von vielen Objekten zu geben (Wynn, 1990, 1992b). Hier bahnt sich laut Fuson (1992) zwar ein erstes Verständnis an, welches erlaubt, genau nach 5 abgezählten Objekten mit dem Zählen stoppen zu können, die Bedeutung des kardinalen Wertes der Zahl 5 ist allerdings damit nicht gegeben.

1.4.2 Niveau II: Mentaler Zahlenstrahl

Im nächsten Schritt werden Einsichten über Ordnungen von Zahlen vertieft und die Zahlwortreihe wird zur Repräsentation von Quantitäten ausgebildet. Beruhend auf Repräsentationen auf einem mentalen Zahlenstrahl, der „mental number line“ (Resnick, 1983, S. 111), entwickelt sich die ordinale Vorstellung, dass die Zahlwortreihe eine feste Abfolge hat, die ein „Größer-Werden“ der Zahlen anzeigt: „(...) numbers correspond to positions in a string, with the individual positions linked by a ‚successor' or ‚next' relationship and a directional marker on the string specifying that later positions on the string are larger“ (Resnick, 1983, S. 111). Die gleichen Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Zahlen spielen noch keine Rolle bzw. sind in ihrer Bedeutung noch nicht verstanden (vgl. Abb. 1). Kinder sind mit 4 bis 5 Jahren durch diese Einsicht in den Aufbau des Zahlenstrahls fähig, Zahlen hinsichtlich ihrer Größe zu vergleichen. Auf die Frage „Welche Zahl ist größer, die 8 oder die 5?“ sagen Kinder zunächst die Zahlwortreihe auf und geben dann die richtige Antwort mit derartiger Begründung „Die 8 ist größer, weil sie in der Zahlwortreihe nach der 5 kommt und weil man dafür ‚länger‘ zählen muss“.

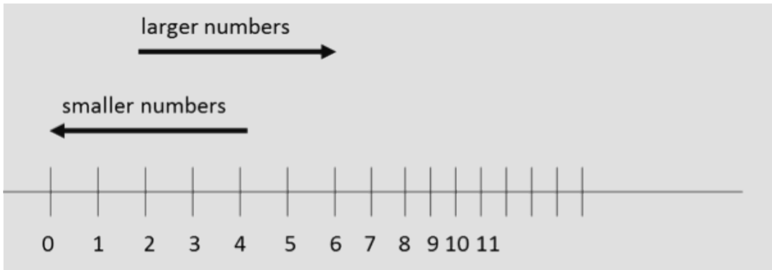


Abbildung 1: Mental number line (aus: Fritz, Ehlert & Balzer, 2013, S. 45)

Die Konstruktion eines linearen Zahlenstrahls mit der Einsicht, dass ein Zahlwort dem nächsten folgt, erlaubt laut Case und Okamoto (1996) ferner die korrekte Bestimmung von Vorgänger- und Nachfolgerzahlen. Es muss jedoch auch dabei immer von Beginn der Zahlwortreihe an gezählt werden, da die Beziehungen noch nicht losgelöst von der gesamten Reihe betrachtet werden können. Werden zunächst Größenvergleiche und Vorgänger und Nachfolger einfach derartig über die *Zahlposition* auf dem Zahlenstrahl festgestellt, setzt hier allmählich ein erstes Verständnis dafür ein, dass Zahlen für *Quantitäten* stehen, die durch ein Voranschreiten auf dem Zahlenstrahl an Größe zunehmen - Zahlen, die später in der Zahlwortreihe kommen, besitzen größere Quantitäten als Zahlen, die eher kommen (Griffin, Case, & Siegler, 1994; Siegler & Booth, 2005).

Nachdem bis zu diesem Zeitpunkt nur das *nicht-numerische* Operieren mit Mengen möglich war, vollzieht sich nun auf diesem Entwicklungsniveau ein entscheidender nächster Schritt: Mit der Zahlenstrahlvorstellung wird ein erstes numerisch präzises Addieren und Subtrahieren von Mengen möglich und durch zählendes Vorwärts- und Rückwärtsgehen realisiert (Case & Okamoto, 1996). Nach Case (1998) gibt es solche linearen Zahlenstrahlvorstellungen ab dem 5. Lebensjahr. Mit dem Verständnis ordinaler Relationen sowie der Kopplung des Zählwissens mit dem protoquantitativen Schema des Vermehrens und Verminderns (Resnick, 1992) werden Mengen- und Zahloperationen mit exakten Zahlen ausführbar. Vergleichbar ist diese Fähigkeit des Anwendens der Zahlwortreihe auf Rechenhandlungen mit der 2. Phase der „unbreakable list" in Fusons (1988) Modell. Nun gelingt ein Lösen einfacher, semantisch eingekleideter Rechenoperationen, jedoch nur handelnd mit konkreter Anschauung. Bei der Aufgabe „Du hast 4 Bonbons und bekommst noch 3 dazu" gehen Kinder wie folgt vor: alle Mengen werden einzeln gezählt, jeweils immer von 1 beginnend („counting-all"-Strategie; Briars & Larkin, 1984; Carpenter & Moser, 1983). Auf diese Weise wird bei der Aufgabe zunächst die erste Menge ausgezählt, zum Beispiel durch Aufklappen von 4 Fingern, falls keine Objekte zur Verfügung stehen, danach wird die zweite Menge mit 3 Fingern repräsentiert, bevor schließlich alle 7 aufgeklappten Finger von vorn ausgezählt werden. Das Ergebnis stellt für das Kind keine Summe dar, sondern verbleibt als Zahl in der Zahlwortreihe bzw. auf dem Zahlenstrahl. Bei Subtraktionsaufgaben wird die Gesamtmenge gezählt, dann die abzuziehende Teilmenge bestimmt sowie weggenommen und letztlich die verbleibende Restmenge ausgezählt. Auch dabei sind die Kinder noch auf konkretes Anschauungsmaterial oder Fingerzählen angewiesen.

Da Kinder zu diesem Entwicklungszeitpunkt bereits zahlreiche einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben erfüllen können, werden ihnen oftmals weitere Fähigkeiten zugeschrieben, über die sie tatsächlich noch nicht verfügen. Denn eine Einsicht in die Kardinalität und somit Mächtigkeit von Mengen ist auf dieser Stufe noch nicht gegeben. Resnick (1983) betont in diesem Zusammenhang, dass die Phase des mentalen Zahlenstrahls mit dem rein zählenden Lösen numerischer Aufgaben entlang eines Richtungsmarkers nur eine „primitive representation of number" (ebd., S. 114) darstellt.

1.4.3 Niveau III: Kardinalität und Zerlegbarkeit

Auf diesem für die mathematische Entwicklung ganz entscheidenden Niveau vollzieht sich der Erwerb des Kardinalzahlverständnisses, indem nun Zahlen als zusammengesetzte

Einheiten begriffen werden, die mit der Anzahl der Elemente die spezifische Mächtigkeit einer Menge repräsentieren (Piaget & Szeminska, 1965). Es wird verstanden, dass die Zahl eine composite unit ist (Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988). Das bedeutet, die Zahl ist eine Einheit, die aus einzelnen Einheiten besteht („a unitary item composed of a plurality of parts“, Steffe, von Glasersfeld, Richards & Cobb, 1983, S. 6), und mehrere einzelne Einheiten integrieren sich zu einer zusammengesetzten Einheit („a collection of individuals taken together“). Daraus resultiert das folgende Verständnis der Zahl: „in the numerical unity it is a plurality of items that are themselves unitary” (ebd., S. 6). Kinder verstehen nun die Verbindung zwischen Zahlwort und Menge. Sie wissen, dass beim Zählen mehrere distinkte Objekte zu einer Menge bzw. zu einem Ganzen zusammengefasst werden und die Anzahl der gesamten Menge durch das letztgenannte Zahlwort symbolisiert wird. Wenn Kindern jetzt die Frage „Wie viele sind es?“ unmittelbar noch einmal gestellt wird, nachdem sie zum Beispiel soeben 5 Objekte korrekt ausgezählt und 5 als Antwort genannt haben, können sie sofort richtig antworten, ohne noch einmal von vorn zählen zu müssen. Sie wissen, dass sie mit der Zahl 5 die Anzahl aller gezählten Elemente ermittelt haben.

In diesem wesentlichen Schritt entwickelt sich die ordinale Repräsentation weiter und Zahlpositionen werden mit Mengen verknüpft. Das heißt, in das Konzept des mentalen Zahlenstrahls integriert sich das Erkennen der Mächtigkeit von Mengen (Piaget & Szeminska, 1965; Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988). Diese Integration von Zahlenstrahlvorstellung und Kardinalzahlkonzept erlaubt Kindern, die Zahlwortreihe nun als korrespondierende Sequenz aufsteigender kardinaler Einheiten zu erfassen. Mit diesem Verständnis kann gleichzeitig eine ordinale und kardinale Verbindung zwischen zwei Mengen hergestellt werden, so dass Zahlen nun auf der Ebene ihrer Mächtigkeit zu vergleichen sind. Kinder verstehen auf diesem Entwicklungsniveau, dass die Zahl 7 nicht nur wegen ihres Rangplatzes in der Zahlwortreihe größer ist als die Zahl 4, sondern wegen ihrer Mächtigkeit: die 7 hat mehr Elemente als die 4.

Mit dem Kardinalitätsverständnis ist sonach ein erstes Wissen über die Zusammensetzung von Mengen aus einzelnen Einheiten bzw. ihre Zerlegung in einzelne Einheiten verbunden. Das erlaubt bei Additionen und Subtraktionen, eine Anzahl von Elementen als Teilmenge zu betrachten. Bei der Addition wird der erste Summand als Teilmenge der Gesamtmenge verstanden. Das heißt, anders als auf Niveau II, werden nun nicht länger bei 1 beginnend sukzessiv erst beide Summanden und dann die Gesamtmenge ausgezählt. Kinder zählen jetzt die erste Teilmenge nicht mehr, sondern zählen von der ersten Teilmenge aus weiter nur noch die zweite hinzu. Bei Subtraktionsaufgaben ziehen sie von der Ausgangsmenge eine Teilmenge als Einheit ab. Dieses Weiterzählen gilt als eine erste effektive Zählstrategie. Mit diesem Wissen kann auch von beliebigen Startpunkten der Zahlwortreihe aus weitergezählt werden (siehe Fusons „breakable chain level").

Mit der wichtigen Erkenntnis der Zerlegbarkeit von Zahlen - die Menge 5 kann in die Teilmengen 2 und 3 zerlegt und wieder zur Gesamtmenge zusammengesetzt werden - bahnen sich erste Kompetenzen des Teile-Ganze-Konzepts an. Diese finden Anwendung im operativen Rechenverständnis; konnten zunächst nur additive und subtraktive Aufgaben zur Endmenge bewältigt werden, werden nun, allerdings weiterhin nur zählend und auf anschaulicher Ebene, Aufgaben zur Austauschmenge lösbar, wie zum Beispiel „Paul hat 9 Stifte, wie viele muss er noch nehmen, damit er insgesamt 15 Stifte hat?" (Fritz & Ricken, 2008, S. 41).

1.4.4 Niveau IV: Klasseninklusion und Enthaltensein

Im nächsten wesentlichen Entwicklungsschritt differenziert sich das Wissen über Mengen und ihre Beziehungen und somit über Teile-Ganze-Verhältnisse weiter aus.

Das Verständnis der additiven Komposition (Piaget & Szeminska, 1965) ist gegeben, wenn „das Kind fähig ist, die Gleichheit eines Ganzen durch verschiedene additive Kompositionen seiner Teile hindurch zu begreifen" (ebd., S. 242). Wenn Kinder diese zentrale Idee des Zusammensetzens eines Ganzen aus *unterschiedlichen* Teilen verstanden haben (z. B. 1+7=8, 2+6=8, 3+5=8 und 4+4=8), kann ihnen die Erkenntnis über diese Beziehungen helfen, die wiederum zentrale Idee des Zerlegens eines Ganzen in seine bestehenden Teile auf unterschiedliche Weise zu verstehen (z. B. 8=1+7, 8=2+6, 8=3+5, 8=4+4) (Baroody, 2006).

Aus dem Verständnis der additiven Komposition geht das Verständnis der Klasseninklusion hervor (Piaget & Szeminska, 1965). Das Inklusionsprinzip gilt als wichtiger Aspekt des Teile-Ganze-Konzepts mit der Einsicht, dass Zahlen andere Zahlen *enthalten*. Jede Zahl der Zahlenreihe enthält alle vorangegangenen Zahlen. Die Menge fünf beinhaltet auch die Menge eins, zwei, drei und vier. Mit diesem Konzept der Klasseninklusion bezüglich konkreter Quantitäten können Kinder eine Teilmenge aus einer Zahl herauslösen, und sie als enthaltenen Teil in Beziehung zum Ganzen reflektieren (ebd.; siehe auch Fusons „numerable chain level"). Damit sind Aufgaben lösbar, wie „Gib mir 5 Bauklötze, 3 *davon* sollen rot sein." (Fritz & Ricken, 2008, S. 38).

Haben Kinder zuvor Mengen nur handelnd in Teilmengen zerlegt und diese wieder zu einer Gesamtmenge zusammengefügt, wobei je neue Mengen hergestellt und für sich ausgezählt wurden, wird nun verstanden, dass die Teilmengen Teile der Gesamtmenge sind, in der sie enthalten sind. Mit dem Herauslösen einer Teilmenge aus einer Gesamtmenge (die Zahl 7 aus der Zahl 12), wird deutlich, dass dadurch mit der 5 die zweite Teilmenge bestimmt werden kann. Es entsteht also ein Verständnis von Teilmengen und der Gesamtmenge als determiniertes Beziehungsgefüge. Piaget und Szeminska (1965) beschreiben: „jede Unter-Menge wird in Beziehung zur anderen begriffen und alle beide in Beziehung zu ihrer Menge. Die betreffenden Relationen bilden von nun an ein operatorisches System derart, daß das Ganze, (…) aus einer additiven Komposition der Teile entsteht und daß diese Teile, dank der kombinierten Additionen und Subtraktionen, zueinander in Verhältnissen stehen, die einsinnig festgelegt sind." (ebd., S. 249). Die Beziehungen eines Zahlentripels sind festgelegt: „In the triple 2, 5, 7, for example, 7 is always the whole; 5 and 2 are always the parts. Together, 5 and 2 satisfy the equivalence constraint for the whole: 7" (Resnick, 1983, S. 115). Auch Fuson (1992, S. 95) spricht von „numerischer Äquivalenz", da die beiden Teile immer äquivalent zur Summe sind. Mit diesem erweiterten Teile-Ganze-Konzept werden die determinierten Beziehungen von Gesamtmenge - Teilmenge – Teilmenge verstanden, das heißt, mit der Kenntnis zweier Mengen kann die dritte Menge erschlossen werden. Unabhängig davon, ob eine additive oder subtraktive Rechenanforderung gegeben ist, liegt immer diese triadische Struktur zugrunde. Wenn das Kind die festen Beziehungen zwischen den drei Mengen mittels des Teile-Ganze-Schemas so interpretieren kann und damit Additions- und Subtraktionsaufgaben als komplementäre Operationen sehen kann, sind die folgenden 12 Aufgaben um das Tripel 2,5,7 im Prinzip dieselben: „5+2=?, 7–5=?; 7–2=?, 2+?=7, or ?+5=7" (Resnick, 1983, S. 115) und 2+5=?, 5+?=7, 7−?=5, 7−?=2, ?+2=7, ?−5=2, ?−2=5.

Aus diesen Einsichten in Teile-Ganze-Verhältnisse entwickeln sich weitere effektive Strategien, wie z. B. die Min-Strategie (oder „count-on-the-larger-summand"-Prinzip) (Siegler & Jenkins, 1989), das heißt, unabhängig von ihrer Reihenfolge können Summanden addiert werden und es kann vom größeren Summanden ausgehend gerechnet werden. Wurde im frühen Stadium bei der Subtraktion zuvor noch der Minuend repräsentiert und um den Wert des Subtrahenden rückwärts gezählt, sind mit dem Inversionsverständnis nun Ergänzungsstrategien möglich, die mit dem nach oben Aufzählen schneller zur Lösung führen. Aufgaben der Form 9-7 werden nun von der 7 aus vorwärts zählend bis zur 9 gelöst (Fritz & Ricken, 2008).

Die Verfügbarkeit dieses Teile-Ganze-Verständnisses erlaubt, entsprechende Kontextaufgaben unterschiedlichen Aufgabentyps auf abstrakte Art zu lösen. Mit dem Durchschauen des Teile-Ganze-Prinzips werden Aufgaben zur Bestimmung der Endmenge, Austauschmenge oder Startmenge möglich, wobei die Lösung noch unterschiedlich schwer fällt, was zeigt, dass die Flexibilisierung des Teile-Ganze-Konzepts bis in die höheren Schulstufen hinein reicht: Aufgaben zur *Endmenge*, wie „Maria hatte 3 Murmeln. Dann gab ihr Hans 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?“ (Stern, 1998, S. 89) und Aufgaben zur *Austauschmenge* wie „Maria hatte 2 Murmeln. Dann gab ihr Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 9 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans ihr gegeben?“ (ebd., S. 89) können von Erstklässlern zunehmend erfolgreich bewältigt werden. Mit einem erweiterten Teile-Ganze-Verständnis können erst allmählich die als schwierig anzusehenden Textaufgaben zur *Startmenge* modelliert werden, wie „Einige Kinder sind auf dem Spielplatz. 5 Kinder müssen nach Hause. Nun sind noch 3 dort. Wie viele waren es zu Beginn?“ (Fritz & Ricken, 2008, S. 57). Studien mit Schulkindern der Klassen 1 und 2 (Riley & Greeno, 1988; Stern, 1998) zeigten, dass Textaufgaben mit unbekannter Startmenge erheblich mehr Schwierigkeiten bereiten als Aufgaben mit unbekannter End– oder Austauschmenge. Denn Aufgaben zur Startmenge können nicht mehr rein zählend von 1 aus gelöst werden, da der Startpunkt nicht gegeben ist. Ursache für die Schwierigkeit des Findens einer unbekannten Startmenge ist überdies laut Resnick (1989), dass keine direkte Verbindung zwischen der Kontextsituation und der arithmetischen Operation vorliegt – so muss im obigen Beispiel addiert werden (5+3), obwohl vom Vermindern gesprochen wird (5 Kinder müssen nach Hause); eine Fähigkeit über die Kinder, nach Resnick (1989), auf abstrakte Art erst mit 8 Jahren verfügen.

Auf diesem Niveau wird mit dem Verständnis der „Kompensation“ und der „Kovarianz“ außerdem der Zusammenhang zwischen Teilmengen und der Gesamtmenge insofern weiter spezifiziert, als dass nun Auswirkungen von *Teilmengenveränderungen* erkannt werden. Die Kompensation betrifft Verschiebungen von Teilmengen: eine Veränderung in einem Teil, die durch eine Veränderung im anderen Teil kompensiert wird, führt zu keiner Veränderung des Ganzen (3+5=8, 3+1+5-1=8). Die Kovarianz besagt, dass Veränderungen eines Teils zur Veränderung der Gesamtmenge führen. Kinder können erkennen, dass das Ganze nach einer additiven Teilmengenveränderung entsprechend größer bzw. nach einer subtraktiven Teilmengenveränderung kleiner wird, z. B. wenn man einen Teil um 1 vergrößert, vergrößert sich auch das Ganze um 1: Wenn 4+3=7, dann ist (4+1)+3=(7+1)=5+3=8.

1.4.5 Niveau V: Relationalität

Auf diesem Niveau entwickelt sich eine konkrete Vorstellung davon, wie sich die Mächtigkeiten der Mengen in der Zahlwortreihe in genauen Relationen unterscheiden. Kinder erreichen die Einsicht, dass die Intervalle zwischen aufeinander folgenden Zahlen gleich groß sind und somit die Abstände von einer zur nächsten Zahl jeweils kongruent sind: jedes nachfolgende Zahlwort unterscheidet sich von seinem Vorgänger um die Mächtigkeit +1: „(...) each next word presents a cardinal number that is one larger than (using the cardinal as well as the sequence meaning) the earlier word. This cardinal sequence thus comprises both class inclusion (embeddedness within the next number) and seriation.” (Fuson, 1992, S. 100).

Neben der zuvor erworbenen Einsicht in die kardinale Bedeutung von Zahlen, die für die spezifische Mächtigkeit einer Menge steht, tritt nun den Zahlen mit dem relationalen Zahlkonzept (Stern, 1998) eine neue Bedeutung hinzu: Zahlen bezeichnen auch die Abstände bzw. Relationen zwischen anderen Zahlen. Zahlen stehen also für Abschnitte auf dem Zahlenstrahl und folglich auch für die Anzahl von Zählschritten zwischen zwei Zahlen. Es gelingen Aussagen zu Fragen, wie „Welche Zahl ist um 3 größer als 4?“ (Fritz & Ricken, 2008). Zahlen selbst werden zählbar und sind „composite units, whose elements symbolize counting acts“ (Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988, S. 338).

Jetzt werden auch gleiche Anzahlen von Zählschritten bzw. gleich große Abstände auf dem Zahlenstrahl als gleichmächtig aufgefasst. Werden Zahlen derart interpretierbar, ist eine Art Maßstab verfügbar, um Differenzen zwischen zwei Mengen unterschiedlicher Größe exakt zu bestimmen. Die Differenz zwischen den Mengen 5 und 10 beträgt ebenso 5 wie die Differenz zwischen 55 und 60 und ist auch äquivalent zum Abstand zwischen 111 und 116. Zahlen stehen insofern auch für eine Klasse kongruenter Intervalle (vgl. Abb. 2).

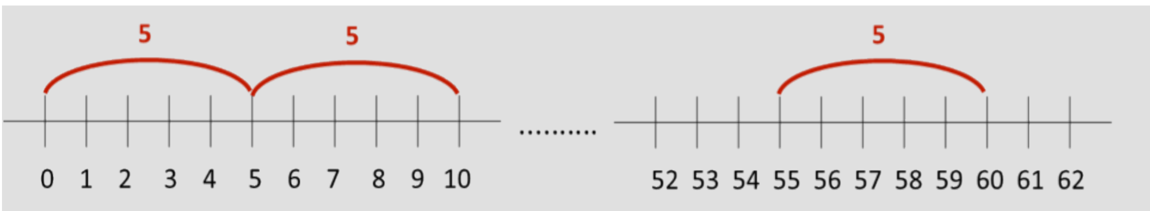


Abbildung 2: Zahlen stehen für Klassen kongruenter Intervalle (in Anlehnung an Fritz, Ehlert & Balzer, 2013, S. 50)

Durch die Verknüpfung des relationalen Zahlkonzepts mit dem Teile-Ganze-Konzept gelingen dann sogenannte *Vergleichsaufgaben* (Riley, Greeno & Heller, 1983; Riley &

Greeno, 1988; Stern, 1998), bei denen der quantitative Vergleich zweier Mengen gefordert ist. Ist das relationale Konzept verstanden, können Vergleichsaufgaben zur *Differenzmenge* gelöst werden: „Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans mehr als Maria?” (Stern, 1998, S. 89). Es gelingen auch Aufgaben zur Ermittlung einer unbekannten *Referenzmenge*, wenn nur die Differenzmenge und eine Menge gegeben sind: „Maria hat 9 Murmeln. Sie hat 4 Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?“ (ebd., S. 89). Für die gesuchte Referenzmenge muss die angegebene Menge mit der Differenzmenge (4 Murmeln mehr) in Beziehung gebracht werden. Dass das Verständnis des relationalen Zahlbegriffs schwierig ist, zeigen Studien, in denen solche Aufgaben zur Referenzmenge von amerikanischen bzw. deutschen Erstklässlern nur mit einer Lösungshäufigkeit von 11 % bzw. 22 % bewältigt wurden (Riley & Greeno, 1988; Stern, 1998).

Noch komplexere Vergleichsaufgaben, bei denen nur die Gesamtmenge gegeben ist, hingegen die Beziehungen zwischen beiden Teilmengen noch zu modellieren sind, werden erst im nächsten Schritt bewältigt: „Auf der Rutsche und auf dem Klettergerüst sind zusammen 10 Kinder. Auf der Rutsche sind 2 Kinder mehr als auf dem Klettergerüst. Wie viele sind auf der Rutsche und wie viele sind auf dem Klettergerüst?“ (Fritz & Ricken, 2008, 42). Hier ist nur die Relationsmenge der beiden Teilmengen gegeben (2 Kinder), beide Teilmengen sind unbekannt. Erst mit der Zahl als Maßstab und einem stabilen Teile-Ganze-Verständnis über unterschiedliche Zahlzerlegungen werden solche Beziehungen zwischen Zahlen auf dieser hohen Abstraktionsstufe modellierbar.

Die Operationalisierungen dieser fünf Niveaus wurden in mehreren Studien entwickelt und geprüft. Dabei konnte das Modell in seinem Aufbau immer wieder repliziert werden (Ricken, Fritz & Balzer, 2011, 2013).

Durch die empirische Überprüfung des Entwicklungsmodells wurden zwei Diagnoseinstrumente gewonnen, die es erlauben, die Leistung eines Kindes einem bestimmten Entwicklungsniveau zuzuordnen. Mit den beiden Testverfahren „MARKO–D“ für das Vorschulalter („Mathematik- und Rechenkonzepte – Diagnose“, Ricken, Fritz & Balzer, 2013) und „MARKO-D-1“ für die erste Klasse (Fritz, Ehlert, Ricken & Balzer, in Vorb.) kann erfasst werden, welche arithmetischen Konzepte Kinder im Alter zwischen 4 und 8 Jahren bereits verstanden haben und welches Konzept sie gerade entwickeln (vgl. Kap. 4.3.2.1.3).

2 Forschungshintergrund: Frühe mathematische Förderung

Im Folgenden wird zunächst die Notwendigkeit bzw. Bedeutung der frühen mathematischen Förderung dargelegt und es wird der Frage nach den Inhalten nachgegangen, bevor unterschiedliche Förderansätze diskutiert sowie grundsätzliche Kriterien für eine geeignete Gestaltung der Förderung formuliert und nationale Förderprogramme beschrieben werden.

2.1 Gründe für eine frühe mathematische Förderung

Lange kam mathematischen Bildungsaktivitäten im Elementarbereich keine große Bedeutung zu. Erst in den letzten 10 Jahren wurde die frühe mathematische Bildung zu einem Thema von hoher Priorität im bildungspolitischen und bildungswissenschaftlichen Bereich. Die Forderungen nach der Notwendigkeit, sich den vorschulischen Lernprozessen bewusst zuwenden zu müssen und somit nach einer „Bildung von Anfang an", sind auf unterschiedliche Gründe zurückzuführen:

Zunächst führten die Ergebnisse internationaler und nationaler Schulleistungsvergleichsstudien (z. B. TIMSS, IGLU, PISA) zu einer Debatte über die Neubewertung der Relevanz der vorschulischen Bildung. Im Besonderen wurde ein Zusammenhang zwischen der Dauer des Kindergartenbesuchs und späteren mathematischen Schulleistungen festgestellt: „Der Besuch einer Vorschuleinrichtung liefert für den Kompetenzerwerb einen bedeutsamen Vorhersagebeitrag" (Ehmke, Siegle & Hohensee, 2005, S. 250). Des Weiteren wiesen Langzeitstudien den hohen Zusammenhang zwischen dem mathematischen Vorwissen und den späteren Leistungen im Grundschulalter nach (u. a. Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Grube & Hasselhorn, 2006; Krajewski & Schneider, 2006; Weißhaupt, Peucker & Wirtz, 2006). Die Befunde, dass gute mathematische Vorkenntnisse die Chancen auf ein erfolgreiches schulisches Mathematiklernen erhöhen, implizieren, dass die frühe Förderung als präventives Element zur Vorbeugung von Rechenschwierigkeiten dienen und kompensatorisch auf Entwicklungsrückstände von Kindern mit geringem Vorwissen wirken kann.

Nicht zuletzt erfolgte die zunehmende Betrachtung der Frühförderung gestützt auf die Erkenntnisse der kognitions- und entwicklungspsychologischen Forschung über den sehr frühen Beginn mathematischer Entwicklungsprozesse. Wie dargestellt, bahnen sich ihnen zu Folge wichtige mathematische Fähigkeiten bereits lange vor dem Schuleintritt an und damit betrifft ihr Erwerb unmittelbar das kindliche Lernen in der Vorschulzeit. Zahlreiche Studien zur nachgewiesenen Wirksamkeit einer frühen Förderung auf das spätere mathematische Wissen unterstreichen schließlich die Effizienz der frühzeitigen Nutzung und Unterstützung dieser vorschulischen Lernprozesse.

2.2 Inhalte einer frühen mathematischen Förderung

Für die Gestaltung einer angemessenen mathematischen Frühförderung stellt sich die Frage nach ihren Inhalten.

In Deutschland wurde durch Beschluss der Jugendminister- und Kultusministerkonferenz im Jahr 2004 in einem „Gemeinsamen Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen" erstmals nach 30 Jahren wieder ein expliziter vorschulischer Bildungsauftrag bundesweit für vorschulische Institutionen formuliert und politisch legitimiert. Darin wurde jedoch nur an einer Stelle kurz auf die Mathematik Bezug genommen. Infolge dieses vereinbarten Konsenses entstanden dann auf Landesebene Bildungs- und Orientierungspläne mit fachlichen Schwerpunkten, explizit auch für den mathematischen Bereich. „Ein einheitliches Bildungskonzept für die Mathematik im vorschulischen Bereich ist aber bislang nicht zu erkennen. Der ‚gemeinsame Rahmen' hat bisher nicht dazu beigetragen, ein solches zu entwickeln" (Royar, 2007, S. 44).

In der Schriftenreihe „Auf den Anfang kommt es an – Perspektiven für eine Neuorientierung frühkindlicher Bildung" vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (2007) werden die Erwartungen an die Inhalte dargelegt:

> „Im Hinblick auf eine konzeptionelle Neubestimmung von Bildungsqualität in Tageseinrichtungen für Kinder ist (…) festzuhalten, dass (…) Inhalte spezifiziert werden sollten, die zum einen auf spätere schulische Lerngebiete ausgerichtet sind und zum anderen auf entwicklungspsychologischen Grundlagen zur Entwicklung domänenspezifischen Wissens basieren." (Kunze & Gisbert, 2007, S. 101)

Aber mit welchen *konkreten* Inhalten können Kindergärten ihrem Bildungsauftrag adäquat gerecht werden?

Laut Hellmich (2007) bieten die international anerkannten nordamerikanischen Standards des NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, vgl. auch Clements, Sarama & DiBiase, 2004), die grundlegende Leitlinien für den Mathematikunterricht vom Kindergarten bis zur zwölften Klasse darstellen und praxiserprobt sind, für den deutschsprachigen Raum eine gute Ausgangsbasis für den Aufbau einer systematischen Förderung mathematischer Fähigkeiten. Für den vorschulischen Bereich werden im NCTM folgende arithmetische Inhalte bzw. Fähigkeiten ausgewiesen:

> „Im Inhaltsbereich Arithmetik sollen Kinder in vorschulischen Institutionen das Zählen erlernen; hierzu gehören zum Beispiel auch die Bestimmung des Vorgängers oder des Nachfolgers einer Zahl, das Vorwärts- bzw. Rückwärtszählen und/oder das Zählen in Zweier-, Fünfer- oder Zehnerschritten. Ebenfalls sollen Kinder im Elementarbereich lernen, Mengen zu bestimmen, zu vergleichen und zu schätzen. Sie sollen darüber hinaus bereits auf frühen Stufen ihrer Entwicklung den Kardinal- und den Ordinalzahlaspekt verstehen, Eins-zu-Eins-Zuordnungen vornehmen können, das Prinzip der Invarianz nachvollziehen können und ein erstes Verständnis der beiden Rechenoperationen Addition und Subtraktion entwickeln.“ (Hellmich, 2007, S. 4)

In den Standards des NCTM finden sich einige der eingangs dargestellten Fähigkeiten wieder. Mit Blick auf die erörterten arithmetischen Konzepte, die dem Rechenerwerb zugrunde liegen, kann die Antwort auf die Frage nach den geeigneten Inhalten einer mathematischen Frühförderung weiter ausgeschärft werden. Als wesentliche Meilensteine bei der Wissensaneignung sind abzuleiten: das Zählen, die Konzepte der mentalen Zahlenstrahlrepräsentation, der Kardinalität, des Teile-Ganze-Verständnisses und die Anbahnung des relationalen Zahlbegriffs (Fritz & Ricken, 2008; Fuson, 1988; Gerster & Schulz, 2004; Krajewski & Schneider, 2006; Resnick, 1983; Siegler & Booth, 2005; Stern, 1998).

2.3 Ansätze zur Förderung

Die Anbahnung und das allmähliche Verständnis mathematischer Fähigkeiten erfolgt erst über die explizite Thematisierung der Inhaltsbereiche. Vorab sei erwähnt, dass es dennoch auch von Interesse für die frühe mathematische Bildung ist bzw. es im Kindergartenalter eine wichtige Rolle zu spielen scheint, wie häufig ein Kind *von sich aus* seine Aufmerksamkeit auf die mathematischen Aspekte seiner Umgebung richtet. Hannula, Räsänen und Lehtinen (2007) bestätigten in einer Studie diese Annahme. Die von Kindern ausgehende Fokussierung stand im Zusammenhang mit ihren Fähigkeiten zur Simultanerfassung und ihren Zählfertigkeiten – „Children with a strong, general, long-term tendency to focus on numerosity tended to enumerate by subitizing larger numbers of items, and had better counting skills at the age of 5 years.” (Hannula, Räsänen & Lehtinen, 2007, S. 55). In einer Längschnittstudie wurde diese Fokussierung sogar als Prädiktor für spätere arithmetische Leistungen am Ende des 2. Schuljahres nachgewiesen (Hannula, Lepola & Lehtinen, 2010).

Da diese fokussierte Auseinandersetzung mit mathematischen Aspekten jedoch nicht von jedem Kind natürlicherweise selbstständig ausgeht, müssen Kindern fördernde Anregungen geboten werden. Es besteht Konsens darüber, dass durch vielfältige Übungsgelegenheiten und Aktivitäten in Alltags- und Spielsituationen und durch einen strukturiert aufbereiteten Umgang mit Zahlen und Mengen die Entwicklung mathematischer Kompetenzen maßgeblich gefördert wird - die Grundlage für den Aufbau eines umfassenden Zahlbegriffs wird also in der häufigen Auseinandersetzung mit mathematischen Aspekten gebildet (Baroody, 1991; Fuson, 1988; Resnick, 1989; Moser Opitz, 2001).

Im Diskurs stehen die *methodisch-didaktisch* unterschiedlichen Ausrichtungen der Ansätze für die frühen mathematischen Lehr-Lernprozesse. Beinahe alle vorschulischen Programme verfolgen zwar eine spielerische Umsetzung der Inhalte, unterscheiden sich aber vor allem in ihrer strukturierten Umsetzung. Interventionsansätze, die einen systematischen, strukturierten und zielorientierten Aufbau mathematischer Kompetenzen verfolgen, zum Beispiel in curricularer Form oder durch Trainingsprogramme, stehen rein spiel- und alltagsorientierten Ansätzen gegenüber, wie im Folgenden ersichtlich werden soll.

2.3.1 Systematischer Förderansatz

Da mathematische Fähigkeiten systematisch aufeinander aufbauen und sukzessiv erworben werden, sollte auch ihre inhaltliche Vermittlung entsprechend folgerichtig und zielgerecht angeleitet sein. Demnach „ist es seitens der Erzieherinnen und Erzieher beim Aufbau mathematischer Vorläuferfähigkeiten notwendig, Lehrgänge in einer systematischen Weise aufzubauen. Um allen Kindern eine geeignete mathematische Grundbildung gewährleisten zu können, scheinen Erklärungen und Unterweisungen (…) beim Lernen der Kinder notwendig“ (Hellmich, 2007, S. 11).

In Ländern, wie zum Beispiel in den USA, den Niederlanden, in Großbritannien, Frankreich, Schweden, Finnland oder Australien, in denen die vorschulische Bildung in das Schulsystem eingegliedert ist, bestehen Lehrpläne, die eine solche systematische Förderung mit festgeschriebenen mathematischen Inhalten vorsehen. Eine deutsch-australische Vergleichsstudie (Clarke, Clarke, Grüßing & Peter-Koop, 2008) mit Kindern im letzten Kindergartenjahr ergab zum Beispiel, dass das verpflichtende Vorschuljahr in Australien mit der täglichen Instruktion von mathematischen Inhalten eine deutliche Verbesserung der mathematischen Fähigkeiten nach sich zieht.

Vor allem in den USA wurden zahlreiche systematische Förderprogramme erfolgreich evaluiert. Griffin (2008) wies für das Programm *Number Worlds*, welches umfangreiche, modulartig festgeschriebene Curricula für Kinder ab 4 Jahren umfasst, nach, dass in ihrer Kindergartenzeit damit geförderte Kinder zu Schulbeginn über ein höheres Zahlenwissen verfügten. Clements und Sarama (2007) zeigten in einer Wirksamkeitsstudie für das curriculare Programm *Building Blocks*, dass die geförderten 4-5-jährigen Kinder unmittelbar nach dem jeweils halbjährlichen täglichen Training Vorsprünge im Vergleich zu den Kontrollgruppen zeigten. Ebenso ist die Effektivität des Vorschulprogramms „Berkeley Math Readiness Projekt“ (Klein & Starkey, 2004) belegt. Es folgt inhaltlich den Standards des NCTM und sieht mit konkreten Durchführungsvorgaben eine angeleitete Vermittlung vor. Ein weiteres strukturiert angelegtes Programm stellt das *Big Math for Little Kids* (Ginsburg, Balfanz & Greenes, 2003) dar, das über zwei Vorschuljahre hinweg täglich durchgeführt wird. Gleichwohl werden bei systematischem Vorgehen in den genannten nordamerikanischen Programmen *spielerische* Lernformate als methodische Zugänge genutzt. Es wird diesbezüglich aber eingeräumt „Children learn from play and play is wonderful; but it is not enough to ensure the learning we aim for. Early childhood teachers therefore should teach“ (Ginsburg, Cannon, Eisenband & Pappas, 2006, S. 221).

Dass der Unterschied zwischen dem systematischen und dem spiel- und alltagsorientierten Förderansatz jedoch keineswegs darin besteht, dass Ersterer auf spielerische oder alltagsbezogene Aktivitäten verzichtet, wird noch im Rahmen der Beschreibung der deutschen Förderprogramme deutlich (vgl. Kap. 2.5).

2.3.2 Spiel- und alltagsorientierter Förderansatz

Der spiel- und alltagsorientierte Ansatz sieht keine präzise vorgeschriebene Abfolge bei der Behandlung der einzelnen Inhaltsbereiche und keine Durchführung in einem instruktionalen Setting vor.

Ein Design der Lernumwelt für die Mathematik durch Spiele, wird hierzulande von Wittmann (2004) angeregt: „Gezieltes, systematisches Lernen muss der Grundschule vorbehalten bleiben. Es nimmt einen umso erfolgreicheren Verlauf, je besser es durch spielerische Aktivitäten im Vorschulalter vorbereitet ist“ (ebd., S. 52). Auch für Steinweg (2005) soll lehrgangsartiges Lernen zugunsten des natürlichen Lernens vermieden werden. Alltägliche Spiel- und Arbeitssituationen sollen in mathematischen Anregungsumgebungen genutzt werden, in denen Kinder aktiv Mathematik entdecken und erfahren können, wobei die Lernumgebung jedoch bewusst auf ihre mathematischen Gehalte gerichtet sein sollte. Die Ergebnisse einer Studie mit Schweizer Kindergartenkindern (Hauser & Rechsteiner, 2011). bestätigten, dass eine spielbasierte Förderung („SpiF“) ebenso gute Lernfortschritte zu verzeichnen hatte wie ein systematisches Trainingsprogram, das eine Kontrollgruppe durchlief - „offenbar geht es auch mit etwas weniger Verschulung“ (ebd., S. 30). Einschränkend räumen die Autoren jedoch ein, dass das spielbasierte Vorgehen keine systematische Verbalisierung mathematischer Aspekte ermöglichte. Hier ist es wichtig zu erwähnen, dass die spielorientierte Förderung in der Studie nicht beliebig, sondern an konkreten mathematik-spezifischen Inhalten angelehnt war. Allgemein herrscht unter den Vertretern des spiel- und alltagsorientierten Ansatzes Einigkeit darüber, dass die Förderung konkrete mathematik-spezifische Fähigkeiten im Blick haben muss.

Insbesondere in den Niederlanden wird für den sogenannten aktivitätsorientierten Ansatz plädiert, der auf das Konzept der „Realistic Mathematics Education" des Freudenthal-Instituts zurückgeht. Mit diesem Ansatz wird die frühe Mathematik in Interaktion mit Erwachsenen, durch sinngebende Hilfsmittel und im spielerischen Kontext bedeutsamer alltäglicher Aktivitäten gelernt. Auch bei diesen spielorientierten Programmen sind die Pädagoginnen und Pädagogen jedoch gehalten, eine enge Verbindung zwischen den persönlichen Interessen und Fähigkeiten der Kinder und den curricularen Inhalten zu schaffen (van Oers, 2004).

2.4 Gestaltung einer frühen mathematischen Förderung

Für Prinzipien[1] einer geeigneten mathematischen Förderung im Vorschulalter sollen nachfolgend Kriterien zugrunde gelegt werden, abgeleitet aus der Literatur oder gestützt auf empirisch evaluierte Programme.

2.4.1 Wesentliche Kriterien für eine angemessene Förderung

Eine Kombination erscheint sinnvoll aus der Aufbereitung von Förderangeboten in einer festen Systematik mit gezielter, begleitender Instruktion und aus Aktivitäten, die als spielerisch einzuordnen sind oder die im Alltag bewusst genutzt bzw. thematisiert werden. Auch werden als geeigneter Zugang zu mathematischen Inhalten Bilderbücher oder Phantasiegeschichten angesehen, die als narrative Anker herangezogen werden (Hellmich, 2007; vgl. auch Van den Heuvel-Panhuizen, 2012).

Die Förderung sollte insgesamt berücksichtigen, dass Strategien verbalisiert und reflektiert werden (Gerlach, Fritz, Ricken & Schmidt, 2007). Wenn Kinder ihre Lösungswege verbalisieren, kann ihr mathematisches Sprachverhalten positiv beeinflusst werden (Ginsburg, Cannon, Eisenband & Pappas, 2006). Darüber hinaus sollten Anregungen zur metakognitiven Auseinandersetzung gegeben werden (Hasselhorn & Gold, 2006). „Der metakognitive

[1] Allgemeine Förderprinzipien, wie soziales, interaktives, aktiv-entdeckendes, ganzheitliches, konstruktivistisches und individuelles Lernen werden hier als gegeben erachtet bzw. vorausgesetzt.

Ansatz fördert das Bewusstsein der Kinder für ihre Lernprozesse und gibt ihnen damit die Möglichkeit, das Lernen selbst als bedeutsame und sinnvolle Kompetenz zu begreifen" (Kunze & Gisbert, 2007, S. 100).

Ferner sollte sich die Förderung auf geeignete Diagnoseinstrumente stützen. Die diagnostische Einbindung ist von hoher Bedeutung, um den Lernstand zu erfassen und die Förderung adaptiv ausrichten bzw. bestenfalls auch *Lernfortschritte* der Kinder förderdiagnostisch begleiten zu können.

Da mathematische Bildung im Kindergarten von Erzieherinnen und Erziehern geleistet wird, muss sich auch mit ihrer angemessenen fachlichen Qualifizierung auseinandergesetzt werden. Nicht zuletzt dürfte das Professionswissen ein entscheidender Faktor bei der erfolgreichen Gestaltung der mathematischen Bildung sein:

> „Im Kontext der mathematischen Frühförderung wird es dabei unerlässlich sein, dass Erzieherinnen und Erzieher zum einen mathematische Lehr-Lernprozesse von Kindern in einer adäquaten Weise fachdidaktisch und fachwissenschaftlich nachvollziehen können, Einblicke in die Gestaltung mathematischer Lehr-Lernprozesse erhalten und – besonders in Hinblick auf die Förderung von Kindern mit besonderen Lernschwierigkeiten – geeignete Verfahren zur individuellen Diagnose und Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten erwerben." (Hellmich, 2007, S. 12).

2.4.2 Kriterium der entwicklungsorientierten Förderung

Neben den bereits dargestellten Kriterien sollte bei einer sinnvollen frühen mathematischen Bildung ein ganz besonderes Augenmerk auf ein weiteres wesentliches Kriterium gerichtet werden - die Entwicklungsorientierung sollte unbedingt Berücksichtigung finden: Es wird „vom Bildungskonzept erwartet, dass es entwicklungsangemessen strukturiert, d.h. die kindliche Entwicklung fördert" (Fthenakis, 2003, S. 12).

„Die entwicklungsangemessene Praxis betont eine kindzentrierte Perspektive, bei der das Kind und seine Bedürfnisse die primäre Quelle für Curicula bilden" (Kunze & Gisbert, 2007, S. 50). Im Mittelpunkt der Förderung steht somit das Kind mit seinen individuellen Entwicklungsvoraussetzungen. Das bedeutet für eine Förderung die Bereitstellung von Angeboten, die sich an den Entwicklungslinien der Kinder orientieren. Dieser entwicklungsorientierte Anspruch ist überdies von Notwendigkeit, folgt man den vorab erörterten Ausführungen über den allmählichen Aufbau mathematischer Fähigkeiten bei Kindern.

Laut Hagen und Hillenbrand (2012) sind daher insbesondere solche Fördermaßnahmen vielversprechend, die auf der Grundlage von *Entwicklungsmodellen* zum Erwerb mathematischer Kompetenzen konzipiert sind, da diese zu einem systematischen Wissensaufbau führen. An dieser Stelle seien die Vorteile des dargestellten Entwicklungsmodells von Fritz und Ricken betont: Wie aufgezeigt, bietet es die Möglichkeit, die mathematikrelevanten Fähigkeiten in der Entwicklung von Kindern im Allgemeinen abzubilden - aus diesen Kenntnissen, wann einzelne Konzepte erworben werden und wie sie aufeinander aufbauen, können sich dann entsprechend die Inhalte einer Förderung ergeben. Darüber hinaus bietet das Entwicklungsmodell zudem im Besonderen eine Orientierung bei der Einordnung von Fähigkeiten *einzelner* Kinder und zeigt, wo die Förderung im Individualfall ansetzen muss.

Entsprechend des langen Entwicklungsprozesses, dem der frühe mathematische Kompetenzerwerb über Jahre unterliegt, ist in diesem Zusammenhang zwangsläufig noch zu resultieren, dass ein vorschulisches mathematisches Bildungsangebot nicht nur als *kurzzeitige* Intervention angelegt sein kann, sondern entwicklungsbegleitend über einen länger andauernden Zeitraum erfolgen muss.

2.5. Nationale Förderprogramme

2.5.1 Evaluierte Förderprogramme

Als weiteres Förderprinzip ist die Nachhaltigkeit einer Förderung anzustreben. In Deutschland wurden verschiedene Konzepte und Materialien zur vorschulischen mathematischen Förderung auf ihre kurz- bzw. langfristige Effektivität evaluiert.

Das Förderkonzept „Mengen, zählen, Zahlen" („MZZ", von Krajewski, Nieding & Schneider, 2007) betont das entwicklungsangemessene, systematische Kriterium. Es fußt auf Studien der Autoren über frühe mathematische Vorläuferfertigkeiten und einem daraus abgeleiteten dreistufigen Entwicklungsmodell. „MZZ" wurde für das letzte Kindergartenjahr konzipiert, um diejenigen spezifischen Vorläuferfertigkeiten im Bereich des Zahlen- und Mengenverständnisses systematisch aufzubauen, die schulische Kompetenzen begünstigen. Förderschwerpunkte liegen daher auf den numerischen Basisfertigkeiten, dem Anzahlkonzept sowie auf Teile-Ganze-Beziehungen und Anzahlunterschiede. Das Programm umfasst 24 Fördereinheiten. Die spielerischen Übungen werden durch vorgegebene Leitfragen der Erzieherinnen und Erzieher begleitet und legen den Fokus auf die Verbalisierungen von mathematischen Handlungen. Die Ergebnisse der Pilotstudie (Krajewski, Nieding & Schneider, 2008a) bewiesen für die mit dem „MZZ"-Konzept über 10 Wochen geförderte Vorschulgruppe kurz- und langfristig bessere Leistungen in den Mengen-Zahlen-Kompetenzen als für die anderen beiden Versuchsgruppen, die ein Denktraining erhalten oder keine Förderung erfahren hatten.

Das Programm „Komm mit ins Zahlenland“ (Friedrich & de Galgoczy, 2004) fördert in konkreten Erfahrungs- und Handlungsfeldern Vorstellungen von Zahlen bis 10 sowie ihrer Zusammenhänge und ihrer Bedeutung in Bezug auf den Ordinal- und Kardinalzahlaspekt. Mathematische Aspekte sind in märchenhafte Zahlengeschichten, Zahlenlieder, Zählreime und Rätsel eingebunden. Im Zahlenland sind die Zahlen zu Hause, sie besitzen als Plüschtiere beseelte Eigenschaften und in personifizierter Weise geben sie ihre Eigenschaften kund. Kritisch zu sehen ist dabei, wie eine Plüschzahlpuppe z. B. ihre Zerlegbarkeit verdeutlichen kann. Die Wirksamkeitsstudie von Friedrich und Munz (2006) berichtet nach 10 einstündigen Trainingseinheiten mit einer kleinen Stichprobe von positiven Effekten gegenüber einer Kontrollgruppe. Einzuräumen ist, dass die Testverfahren nur wenige spezifisch mathematische Aufgaben enthielten. Pauen und Pahnke (2008) nutzten hingegen einen mathematikspezifischen Test und dokumentierten nach einer 10-wöchigen Intervention mit dem „Zahlenland“ einen signifikanten Lernzuwachs. Friedrich und Munz (2006) benennen auch höhere Werte im DEMAT 1+ bei den geförderten Kindern am Ende des ersten Schuljahres, geben jedoch diesbezüglich keine Daten an. Krajewski, Nieding und Schneider (2008a) konnten diese kurz- und langfristigen positiven Effekte einer mit dem Zahlenland geförderten Gruppe im Rahmen ihrer „MZZ“-Studie nicht bestätigen. Am Ende der ersten Klasse schnitt sie gar schwächer ab als die ungeförderte Kontrollgruppe.

„Das kleine Zahlenbuch“ (Müller & Wittmann 2002, 2004) bietet mathematische Spiele für Kinder im Alter von 4 bis 7 Jahren. Ziel ist es, Kinder durch eigene Erkundungen im Sinne einer „aktiven Aufbauleistung“ (Wittmann, 2004, S. 51) Fähigkeiten und Fertigkeiten über Zahlenreihen, Rechnen, Rechenvorteile, arithmetische Muster sowie Zahlen in der Umwelt erwerben zu lassen. Laut der Evaluationsstudie von Pauen und Pahnke (2008), erzielten Kinder nach einer 2,5-monatigen Durchführung mit diesem Konzept substantielle Leistungsfortschritte, die denen der Zahlenland-Gruppe vergleichbar ausfielen. Die Autoren geben zu denken, dass bei ihrem Vergleich der beiden Konzepte eine Kontrollgruppe fehlte und daher die Lernzuwächse womöglich nicht nur auf die Interventionen zurückführbar sind, sondern auch natürliche Entwicklungsprozesse widerspiegeln.

Über diese Programme hinaus gibt es weitere, als geeignet zu erachtende Förderkonzepte, deren Wirksamkeit in Untersuchungen belegt wurde, die allerdings nicht auf dem Markt erhältlich sind:

Das „Förderprogramm zur Entwicklung des Zahlkonzepts“ („FEZ“, Peucker & Weißhaupt, 2005) basiert auf einer entwicklungsorientierten Struktur und fokussiert auf die drei Bereiche Kardinalzahlkonzept, Zahlvorstellung und Teile-Ganze-Konzept. In den einzelnen Förderstunden wird das jeweils im Kontext „Zoo“ erst im konkreten Handeln Erfahrene im Weiteren bildlich und letztlich symbolisch übertragen. Einige Monate vor ihrer Einschulung mit dem „FEZ“ geförderte Kinder erzielten deutlich größere Fortschritte in der Entwicklung des Zahlkonzeptes als die ungeförderte Kontrollgruppe, abzulesen waren die Ergebnisse im zugehörigen Test („DEZ“ – „Diagnostikum zur Entwicklung des Zahlkonzepts“, Peucker & Weißhaupt, 2002).

Das Programm „Spielend Mathe“ von Quaiser-Pohl (2008) fördert Vorschulkinder in zehn spielerischen, mit der konkreten kindlichen Lebenswelt verbundenen Fördereinheiten über visuelle Diskriminierung, Mengenauffassung, Zahlbegriff, einfache Rechenoperationen und Raumvorstellung. Die Bereiche bauen dabei nicht in systematischer Abfolge aufeinander auf, sondern sind flexibel durchführbar. Die Evaluationsstudie berichtet von signifikanten Effekten nach dem Post-Test. Auch nach dem ersten Schulhalbjahr zeigten die geförderten Kinder in einigen Teilen des Heidelberger Rechentests bessere Leistungen als die nicht geförderten Kinder.

Grüßing und Peter-Koop (2008) identifizierten in ihrer Förderstudie potentielle Risikokinder und förderten diese wöchentlich in ihrem letzten halben Kindergartenjahr. Als Grundlage dienten individuelle Förderpläne, die jeweils auf die zuvor erhobenen Kompetenzen zugeschnitten waren. Die ausgewählten Kinder zeigten unmittelbar nach Beendigung der Förderung kurz vor ihrer Einschulung erhebliche Leistungszuwächse in ihrem mengen- und zahlenbezogenen Wissen. Die Autoren verweisen mit Blick auf eine fehlende Kontrollgruppe zwar darauf, dass eindeutige, ausschließlich auf die Förderung zurückzuführende Effekte, nicht belegt sind, der Abstand zu Kindern mit gut entwickelten Vorläuferfertigkeiten beim Schuleintritt jedoch erheblich verkleinert werden konnte. Die Verbesserung zeigte sich auch noch für die Hälfte der Risikokinder am Ende der ersten Klasse als nachhaltig; bezogen auf ihre Mathematikleistungen waren sie im Vergleich zu den Kindern ihrer jeweiligen Klassen unauffällig.

2.5.2 Förderprogramm „Mina und der Maulwurf“

Zum Abschluss des Kapitels soll ein entwicklungsorientiertes Förderprogramm vorgestellt werden, das auf der Grundlage des beschriebenen Entwicklungsmodells zum Rechnen Lernen von Fritz und Ricken (2008) konzipiert wurde. Die Frühförderbox Mathematik „Mina und der Maulwurf“ von Gerlach und Fritz (2011) bietet für Kinder von 4 bis 8 Jahren umfangreiche Möglichkeiten einer systematischen, entwicklungsorientierten Gewinnung der im Entwicklungsmodell aufgezeigten grundlegenden arithmetischen Konzepte an (vgl. für ausführliche Beschreibung des Förderprogramms Kap. 4.3.1.5 und Kap. 4.4.1.4). Im Vergleich zu den oben genannten Förderprogrammen ist die Durchführung nicht auf wenige Wochen bzw. Monate beschränkt. Sechs systematisch aufeinander aufbauende „Bausteine“ umfassen folgende Inhaltsbereiche (Gerlach & Fritz, 2011):

- Baustein 0: „Basisfähigkeiten“
- Baustein 1: „Zahlwortreihe und Zählen“
- Baustein 2: „Mengenverständnis“
- Baustein 3: „Mengenoperationen“
- Baustein 4: „Rechnen“
- Baustein 5: „Differenzen und Relationen“

Die Kernpunkte des Konzepts stellen Geschichten und angeleitete Übungen dar. Die Erzieherin führt die Kinder mit Geschichten in eine Wald- und Wiesenwelt. Jede Geschichte wirft einen mathematischen Konflikt auf, den es seitens der Kinder zu lösen gilt. Die offene Problemsituation am Ende der Geschichte erfordert eine eigenständige Konstruktion von Lösungen. Initiiert durch die Erlebnisse der „Biene Mina“ wird sich anschließend zielführend mit dem mathematischen Problem auseinandergesetzt. Für diese gemeinsame Übung stehen als inhaltsbegleitende Hilfe für die Erzieherinnen und Erzieher Aufgabenkarten zur Verfügung. Auf diesen finden sich wörtliche Formulierungshinweise zur Durchführung bzw. Vorschläge für geeignete Strategien. Erkenntnisse sollen interaktiv durch kommunikative Prozesse aufgebaut werden. Gleichermaßen, wie Kindern Raum für das selbstständige Finden von Lösungen auf differenten Wegen eingeräumt wird, werden Kontroll- und Reflexionsfertigkeiten gezielt angeregt und vermittelt.

Zur Vertiefung der 48 Inhaltsbereiche werden abwechslungsreiche Formen kindlichen Lernens und in Spiel- und Alltagssituationen genutzt, die den mathematischen Anforderungen des jeweils zu fördernden Schwerpunktes entsprechen. Erzieherinnen und Erzieher können die einzelnen Fördereinheiten abhängig von den Bedürfnissen der Lernenden zeitlich ausgedehnt gestalten.

Diagnostik und Förderung sind auf das Entwicklungsmodell bezogen

Die Lernvoraussetzungen der Kinder sollen zum Förderbeginn mit dem zugehörigen MARKO-D-Test (Ricken, Fritz & Balzer, 2013) erhoben werden. Der Test erlaubt zu interpretieren, ob die Leistung altersgerecht, beschleunigt oder verzögert ist. Eine solche theoriebasierte Diagnostik ist hilfreich für die Planung einer adaptiven Intervention. Die Förderung kann damit in Passung mit dem Lernstand durchgeführt werden: In der Abbildung 3 ist das Kind 7 Jahre alt. Es befindet sich entwicklungsmäßig erst auf Niveaustufe II. Das bedeutet, es ist im Vergleich zu seiner Altersgruppe entwicklungsverzögert und kann nur auf Niveau II zählen, rechnen oder mit Mengen umgehen. Das würde für die Förderung mit dem Programm „Mina und der Maulwurf" bedeuten, dass die Fähigkeiten dieses Kindes auf Niveau II zunächst noch durch die Inhalte des Bausteins 2 gefestigt werden und dann die Fähigkeiten des nächsten Entwicklungsniveaus III mit den Inhalten des Bausteins 3 vermittelt werden (Gerlach & Fritz, 2011).

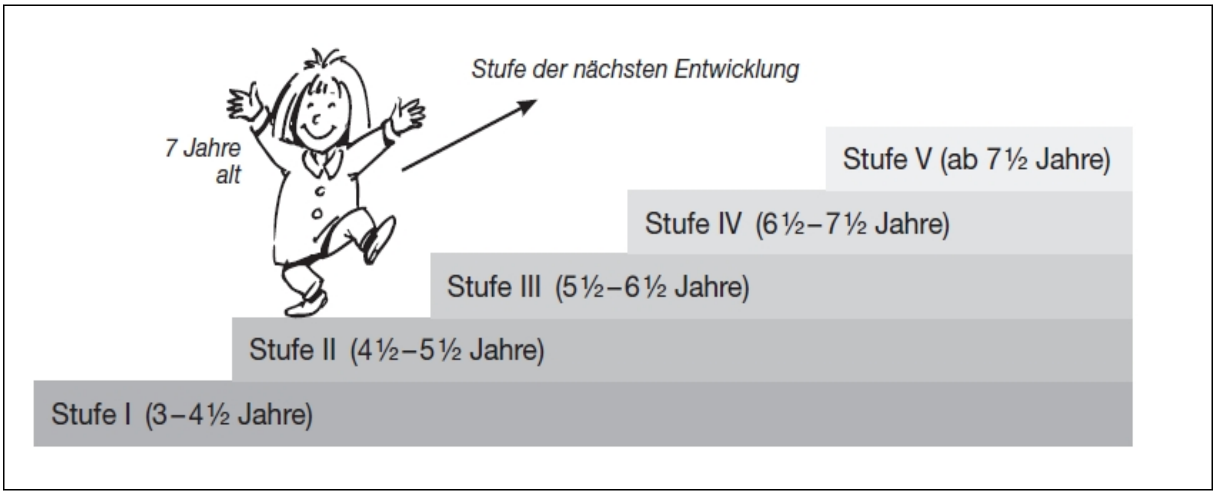


Abbildung 3: Förderdiagnostische Orientierung am Entwicklungsmodell (aus: Gerlach & Fritz, 2011, S. 11)

3 Forschungsfragen

3.1 Fragestellungen im Hinblick auf die Konzepte des arithmetischen Verständnisses

In den Ausführungen des ersten Kapitels sind die wesentlichen konzeptuellen Leistungen in der arithmetischen Entwicklung deutlich geworden. Insbesondere wird die Entwicklung eines umfassenden Teile-Ganze-Konzepts in seiner Bedeutung als hoch erachtet. Vor diesem Hintergrund ist es ein Ziel dieser Arbeit, die Verfügbarkeit des Teile-Ganze-Konzepts näher zu beleuchten.

Studie I

Dazu werden in der ersten Studie das nicht-numerische und das numerisch präzise Teile-Ganze-Verständnis bei Kindern im Alter von 4 bis 8 Jahren anhand von Textaufgaben zu sechs unterschiedlichen Teile-Ganze-Inhaltsbereichen genauer untersucht. Die Studie wird im Besonderen die Fragestellung nach dem Zusammenhang zwischen dem nicht-numerischen und dem numerisch präzisen Verständnis aufnehmen. Es sollen Antworten auf folgende Fragen gefunden werden:

- Über welches Teile-Ganze-Verständnis verfügen die Kinder unterschiedlichen Alters?
- Bauen einzelne Fähigkeiten hierarchisch aufeinander auf und lassen sich Entwicklungsniveaus identifizieren?
- Sind die nicht-numerischen Vorstellungen die Voraussetzung für die numerisch präzisen Vorstellungen?
- Welche Zusammenhänge lassen sich zwischen nicht-numerischen und numerisch präzisen Leistungen bei den Kindern abbilden?

Studie II und III

Es wurde aufgezeigt, dass bis zur Bewältigung unterschiedlicher Teile-Ganze-Aufgaben ein langer Entwicklungsweg zu beschreiten ist. In zwei weiteren Studien wird die Verfügbarkeit des numerisch präzisen Teile-Ganze-Verständnisses bei Kindern des zweiten und fünften Schuljahres untersucht. Von Interesse sind folgende Aspekte:

- Wie stellt sich das Teile-Ganze-Konzept bei Schulkindern dar? Wie gut werden Teile-Ganze-Aufgaben von Fünftklässlern bewältigt, die eigentlich entwicklungsgemäß die Prinzipien verstanden haben müssten?

- Wie dargestellt, variieren Teile-Ganze-Aufgaben hinsichtlich ihres Schwierigkeitsgrades, obwohl ihnen letztlich dieselben Teile-Ganze-Beziehungen zugrunde liegen. Anhand von verschiedenen Textaufgaben zur Addition und Subtraktion wird untersucht: Zeigen sich diese Unterschiede auch noch im fortgeschrittenen Entwicklungsstadium?

3.2 Fragestellungen im Hinblick auf die frühe mathematische Förderung

In den Ausführungen des zweiten Kapitels wurden die Hintergründe der mathematischen Frühförderung näher in den Blick genommen. In drei Studien wird die Evaluation des Fördertrainings „Mina und der Maulwurf" unter verschiedenen Schwerpunkten vorgenommen.

Studie IV

In Studie IV werden vor dem Hintergrund der Forderung nach der Nachhaltigkeit von Trainingsprogrammen nicht nur die unmittelbaren Effekte der Förderung mit dem Förderprogramm „Mina und der Maulwurf" auf die Leistungen von Vorschulkindern betrachtet, sondern auch die Wirkungen im Längsschnitt:

- Welche kurz- und langfristigen Wirkungen hat eine der Einschulung unmittelbar vorgelagerte 6-monatige Förderung im Kindergarten?
- Können Kindern durch die Förderung verbesserte Startchancen für den Schulbeginn bzw. auch nachhaltig günstigere Lernvoraussetzungen gegeben werden?

Studie V

Von der eigenen Interventionsstudie IV unterscheidet sich in Studie V (Dissertationsprojekt von C. Hildenbrand) zunächst das Alter der Kinder. Die Studie widmet sich der Fragestellung:

- Zeigt das Fördertraining „Mina und der Maulwurf" eine unmittelbare Wirksamkeit auch für *jüngere* Kindergartenkinder?

Anknüpfend an die Diskussion um unterschiedliche Förderansätze widmet sich diese zweite Studie außerdem der Frage nach der Effektivität unterschiedlicher Förderansätze. Für diesen Vergleich wird Erzieherinnen und Erziehern das Professionswissen für die Förderung in zwei getrennten Fortbildungsmaßnahmen unterschiedlich vermittelt. Einerseits ist die Fortbildung mit der Vorgabe und Anleitung eines strukturierten Trainings verbunden, andererseits mit der theoretischen Auseinandersetzung einer entwicklungsorientierten Förderung, worauf aufbauend spiel- und alltagsintegriert gearbeitet wird:

- Unterscheiden sich die Effekte, wenn die Förderung systematisch mit einem Training („Mina und der Maulwurf") oder spiel- und alltagsintegriert nach theoriegeleiteten Aspekten ohne ein strukturiertes Training erfolgt?

Studie VI

In Studie VI ist schließlich die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Mathematik und Sprache ein Forschungsanliegen. Das Fördertraining „Mina und der Maulwurf" unterliegt einer starken sprachlichen Ausrichtung. Diese sprachdominante Vermittlung, zum Beispiel über die Geschichten und die instruierten Übungseinheiten, wirft folgende Fragestellungen auf:

- Birgt die Sprachlastigkeit des Förderprogramms „Mina und der Maulwurf" für sprachlich schwache Kinder ein Hindernis oder können auch sie ihre *mathematischen* Leistungen verbessern?
- Kann das sehr sprachlich orientierte Fördertraining gar einen Vorteil bedeuten und können Kinder auch hinsichtlich ihrer *phonologischen* Fähigkeiten von der im eigentlichen Sinne mathematischen Förderung profitieren?

Teil II

4 Empirische Studien

4.1 Studie I:

Non-numerical and Numerical Understanding of the Part-Whole Concept of Children Aged 4 to 8 in Word Problems[2]

Abstract

For the development of mathematical competencies from preschool children and children at primary school age, the acquisition of a comprehensive part-whole concept is essential. The principle of understanding numbers as compositions of other numbers as well as being able to decompose numbers and interpret quantitative relations, enables a flexible understanding of operations. It is known that the part-whole concept is based on various schemas and is subject to a longer learning process. The aim of the study was to examine the non-numerical and numerical understanding of the part-whole concept more closely. To achieve this, the availability of the complex part-whole concept in children aged 4 to 8 years was examined by means of a sample of 181 children on the basis of word problems with non-numerical and numerical tasks on different part-whole contents (compensation, covariation, final amount, initial amount, finding and evaluating decompositions of amounts). A Rasch analysis resulted in a two-dimensional model. According to this, two content-related competency dimensions must be differentiated: A non-numerical dimension with the understanding of solving part-whole tasks in word problems without number relation, and a numerical dimension with the understanding of exact quantification with numbers. The two dimensions are considered as two different domains of knowledge, though they are highly correlated. They develop partly parallel, while at the beginning the non-numerical part-whole understanding develops a little earlier. Two levels of competencies could be identified within each dimension. The findings are discussed regarding the distribution of the children on the respective levels of competencies depending on their age.

[2] Dieses Kapitel 4.1 entspricht einem Artikel, der im Journal für Mathematik-Didaktik veröffentlicht wurde: Langhorst, P., Ehlert, A. & Fritz, A. (2012). Non-numerical and Numerical Understanding of the Part-Whole Concept of Children Aged 4 to 8 in Word Problems. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(2), 233–262.

4.1.1. Theoretical Background

4.1.1.1 Significance of the Part-Whole Concept

In a large number of models and studies the part-whole concept is presented as a central conceptual achievement within the mathematical acquisition of competencies.

The part-whole concept is the basis for constructing a concept of addition and subtraction (Resnick, 1989; Carpenter & Moser, 1983). The relevant idea of decomposition and composition is important for the development of early proportional reasoning (Singer & Resnick, 1992) as well as of early sharing (Pepper & Hunting, 1998) and early probabilistic thinking (Spinillo & Bryant, 1999). The part-whole concept is meaningful for solving word problems to the four basic arithmetic operations (Riley & Greeno, 1988; Stern, 1998). Furthermore, it supports children in finding effective calculating strategies and in understanding the place value system, including the decimal numeration system (Gerster & Schultz, 2004; Ross, 1989). The part-whole-schema provides the basis for concepts of multiplication and division (Steffe et al., 1988), while the division in turn is of fundamental relevance and a prerequisite for the later understanding of fractions and calculation of fraction (Malle, 2004; Wartha & Wittmann, 2009). Although fractions are considered components in a formal mathematics context, children already have some understanding of part-whole relationships based on their experience with physical objects (Mix et al., 1999). Thus, the part-whole understanding - as a basic arithmetic concept - has also influence on mathematical education in secondary school.

The focus of this paper is on the special importance of the part-whole concept for understanding and solving word problems.

The part-whole concept is postulated a necessary implication for the early mathematical education - it is regarded as central predictor for the development of school achievement (Fritz & Ricken, 2008; Gerster & Schultz, 2004; Krajewski & Schneider, 2006; Sophian & McCorgray, 1994). Resnick (1983) even considers it to be the most important mathematical acquisition of the first years at school. “Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships” (p. 114).

The concept stipulates that each quantity can be decomposed and that the sum of the parts is equivalent to the whole (Fuson, 1992). This implies that parts compose the whole or are integrated therein. By understanding these elemental relations, it becomes possible to understand addition as composition of partial proportions and subtraction as partition toward a known proportion of a whole (Gerster & Schultz, 2004). "The Part-Whole schema specifies relationships among triples of numbers. In the triple 2-5-7, for example, 7 is always the whole; 5 and 2 are always the parts. Together, 5 and 2 satisfy the equivalence constraint for the whole: 7. The relationship among 2, 5, and 7 holds whether the problem is given as 5+2=?, 7-5=?, 7–2=?, 2+?=7, or ?+5=7" (Resnick, 1983, p. 115) or 2+5=?, 5+?=7, 7-?=5, 7-?=2, ?+2=7, ?-5=2, ?-2=5. When regarding a task as parts and whole, the complementary connection of addition and subtraction and the determined relationships of the three quantities become clear: From information on two quantities, the third can be derived (see Fig. 4.1.1).

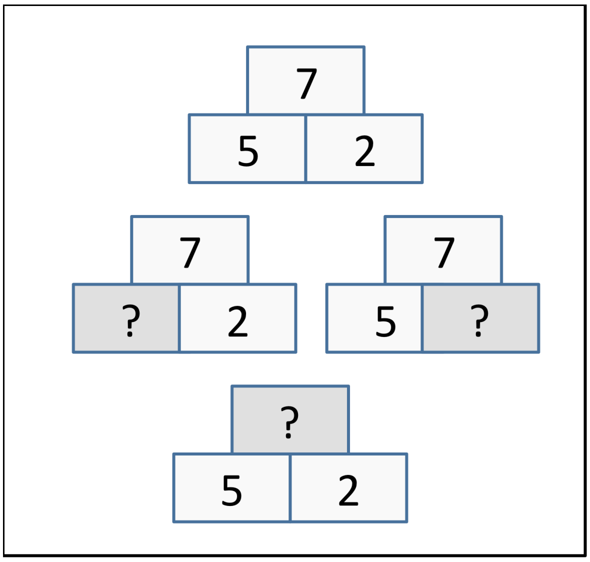


Figure 4.1.1: Number triples (according to Resnick, 1983)

4.1.1.2 Preverbal Quantitative Knowledge

An understanding of quantitative situations already exists preverbally in infants and very young children. This preverbal comprehension as a representation of magnitudes, which is already present prior to the emergence of symbolic number representation (Lipton & Spelke, 2005), is regarded as a basis for later mathematical development. Thus, an early understanding of quantities also affects the subsequent development of the part-whole concept. Therefore it is worth being noted here.

Several studies suggest that children possess primary numerical abilities. The human brain is equipped with a congenital mechanism or, in any case, with very early abilities to represent quantities (Dehaene, 1997). Feigenson et al. (2004) distinguish between two early core systems: An analog-magnitude-representation-system and a precisely working object-file-representation-system. The analog-magnitude-representation-system allows imprecise and approximate comparisons where quantities are not represented as single, discrete units. Habituation studies (Lipton & Spelke, 2003) showed that, at the age of only 6 months, infants already recognize the difference between quantities in a ratio of 1 : 2 on pictures (4 vs. 8 and 8. vs. 16 objects, but not 4 vs. 6 or 8 vs. 12). 9-10 month-old children were able to estimate quantities in a ratio of 2 : 3. These findings suggest that numerical discrimination becomes more precise during infancy, prior to the onset of language acquisition (Feigenson et al., 2004). Examinations with 10 month-old children also showed that, next to recognizing the difference, infants already recognize ordinal relationships, when quantities are presented in a larger/smaller sequence (Brannon, 2002). Also, 9 month-old children already demonstrated an understanding of simple arithmetic problems such as 5+5 by looking at unexpected results significantly longer (McCrink & Wynn, 2004).

The second innate core system is the precise representation of distinct quantities up to a maximum of three. In experiments 10-12 month-old infants spontaneously chose the larger quantity of equal-sized crackers, when they had the choice of 1 vs. 2, 2 vs. 3 or 1 vs. 3 crackers. However, with choices of 3 vs. 4, 2 vs. 4 and even 1 vs. 4 crackers, efforts failed. Children chose randomly, despite of the large difference between the quantities (Feigenson et al., 2002). Furthermore research reveals an understanding of the discrimination of quantities relating to the equality or difference of numbers up to 3 (Clearfield & Mix, 1999). Infants also showed the ability to recognize simple additive and subtractive operations with two or three objects (Wynn, 1992; Feigenson et al., 2002). However, it must be considered that the recognition of quantity variances does not yet represent an explicit number concept. It might also originate in a less differentiated distinction of perception of extensions and should not be overestimated (Baroody et al., 2003; Clearfield & Mix, 1999).

4.1.1.3 Development of the Part-Whole Concept

Children acquire plenty of informal, intuitive mathematical competencies long before entering school (Fuson, 1992; Hasemann, 2007). These competencies constitute a significant basis for formal mathematics at school. In the following, the development of the part-whole concept during the pre-school years until the end of the second grade is outlined. This cannot be done independently of the general cognitive development, which is the prerequisite for understanding the concept.

For this period of development, Resnick (1992) lists four kinds of mathematical thinking. From the first concrete level *Mathematics of protoquantities* (*qualitative reasoning about amounts of physical materials before verbal counting*), the development evolves into three abstract levels: On the second level, the *Mathematics of quantities (counting-based reasoning about numbers*), children at preschool age can reason about numbers tied to a meaningful context (adding 2 more cookies to 3 cookies makes 5 cookies). On the next level of *Mathematics of numbers (reasoning about numbers in the abstract),* during school age, children can handle numbers more and more systematically (3+2) in an abstract way. On the last level, *Mathematics of operators* (*generalizing about numerical relations*), general arithmetical principles, e.g. the commutativity or the inversion of addition and subtraction, are understood.

Steffe, Cobb and von Glasersfeld (1988) also present a model for the part-whole concept: learning math starts with personal experiences, then moves on to concrete objects (perceptual stage) and is followed by representations of quantities (figurative stage). Finally, children deal with numbers in an abstract way (abstract stage). It is a consensus view that a sufficient understanding on a perceptual level must be available and the forms of representation must be linked to each other, in order to give sense to symbolic operations.

4.1.1.3.1 Non-numerical Understanding of the Part-Whole Concept

Non-numerical quantitative knowledge is relevant for the development of the part-whole concept. Children apply it during the acquisition of language, but before acquiring the number-word-row and the cardinal principle. They use this non-numerical knowledge to estimate or compare quantities and while they perform simple operations. Neuropsychological studies (Butterworth, 1999; Feigenson et al., 2004; Piazza et al., 2004) prove that the ability to represent and process numerical magnitude information is crucial for the mathematical development.

Levels of Development

The first of the above mentioned four levels of Resnick (1992) is particularly significant here, i.e. the concrete *protoquantitative* level, which does not yet contain any relationship to number words: “comparisons of amounts are made and inferences can be drawn about the effects of various changes (…) on amounts, but no numerical quantification is involved“ (p. 403). With the *“comparison-schema”* children begin to compare two quantities with more/less judgments at the age of 2 years. By means of the *“increase/decrease-*

schema", they understand and name quantity changes as a process at the ages of 3 to 4 years (something becomes "more" when something is added or "less" when something is taken away, and it remains "the same" when nothing is added or taken away). The important *"protoquantitative part-whole schema"* is developed at the age of about 4 years and refers to the knowledge of composing and decomposing quantities without exact quantification. Children draw it from real-life-situations, when they understand that a quantity can be cut into pieces and these pieces, put together again, add up to the same amount. "The protoquantitative part-whole schema is the foundation for the later understanding of binary addition and subtraction and for several fundamental mathematical principles, such as the commutativity and associativity of addition and the complementarity of addition and subtraction. It also provides the framework for a concept of additive composition of numbers that underlies the place value system" (Resnick et al. 1991, p. 32).

Baroody, Wilkins and Tiilikainen (2003) further specify this and present 5 phases before children engage in quantitative thinking about counted collections: *pure qualitative reasoning* (recognizing that non-quantified wholes can consist of parts), *qualitative reasoning about inexactly estimated quantities* (a whole is more than its parts), *qualitative reasoning about exact but nonverbally represented quantities* (part and part make together *some* larger whole) and *quantitative reasoning about exact but nonverbally represented quantities* (part and part make together *the* larger whole). On the last level, children associate number words with subitized quantities ("two" and "one" make the larger whole "three").

Hunting (2003) postulates four levels of cognitive competence for part-whole reasoning in the context of small quantities for preschoolers: With the *qualitative comparison scheme* children know that adding to a set will result in an increase of its whole. The *quantitative comparison scheme* allows to judge quantitative relationships with concrete, observable quantities of up to three objects. By means of the *quantitative comparison scheme representational stage*, children can use the integration operation on both internal and perceptible quantities. They can perform simple calculations mentally. Beyond three objects, perceptible material needs to be available. With the *numerical comparison scheme*, children can draw on their experience to anticipate outcomes. They can understand class inclusions of numbers and advanced part-whole operations.

Competencies in Word Problems

In studies with 4 to 6-year-olds, Sophian and McCorgray (1994) and Sophian and Vong (1995) provided evidence for the early development of knowledge about part-whole relationships. In these studies, the understanding of part-whole problems on the final-unknown and on the initial-unknown amount (starting amount) was examined. The tasks were presented with a visible and an invisible quantity and required an estimation of approximate number results and thus the differentiation whether it was an additive operation (answer with larger number) or a subtractive operation (answer with smaller number). "Between 4 and 5 years of age, solution processes that are sensitive to the part-whole relationship in the problems emerge. (…) The 4-year-olds performed poorly not only on the initial-unknown problems, which were meant to test for part-whole knowledge, but also on final-unknown problems" (Sophian & McCorgray, 1994, p. 19). The authors state that numerical part-whole relations were not understood by the 4-year-olds. Only the five- and six-year-olds gave responses pointing into the right direction to both, the final-unknown and the initial-unknown problems. Here an example for an initial-unknown problem type: "One morning Mickey‘s and Raggedy‘s fish were having a party. At first both Mickey's and Raggedy's fish were there. Later Mickey's two fish went home, and Raggedy's seven fish were left. How many fish were at the party at first?" (ibid., p. 9). The 5-year-olds knew that at first there must have been more than 7 fish. However, they had difficulties with precisely correct answers. According to the authors, they have not yet integrated relational knowledge into the counting process and the knowledge of arithmetic operations. Between the fifth and sixth year, a considerable increase of abilities at finding precise solutions for part-whole tasks could be found.

Thus, the assumption that the inability to solve initial-unknown problems is evidence for the lack of a part-whole concept (Briars & Larkin, 1984; Piaget, 1965; Riley & Greeno, 1988) can be disproved by the findings pointed out above. However, Resnick (1989) states that when the unknown is the initial amount, the problem is much harder for children to solve. There often is no direct mapping between the story situation and the arithmetic operation that solves the problem. All the more if the story describes a decrease in the quantity (in the example: "Mickey's two fish *went home*") and the operation needed is an addition (2 fish + 7 fish). This is an ability which children only from the age of 8 years have in an abstract form (ibid.).

4.1.1.3.2 Numerical Understanding of the Part-Whole Concept

In the following, we want to outline how part-whole ideas become numerical. “As children apply their counting skills in situations that earlier were reasoned about only proto-quantitatively, (…) the part/whole schema becomes quantified“ (Resnick, 1992, p. 408). In the course of the development, knowledge about sets and numbers will be integrated. Part-whole tasks become precisely solvable with the acquisition of the number words, their application in counting contexts and with the idea that numbers are ordered in a line.

Integration of Knowledge

Counting is a central moment in the mathematical development (Gelman & Gallistel, 1978; Fuson, 1992). Part-whole reasoning and counting are closely related. Part-whole conceptions develop concurrently with counting abilities; an integration is necessary for accomplishing part-whole operations (Steffe et al., 1988). At first, numbers can just be recited without being related to corresponding quantities - beginning at an age of 3 or 4 years, a quantity awareness of numbers is affected by the connection of numbers with quantities (Le Corre et al., 2006; Wynn, 1990). Krajewski and Schneider (2006) describe an *imprecise concept of number*, when numbers are related to rough quantity categories (“two” or “three” mean little, “eight” or “twenty” mean a lot). Only with a *precise concept of number* is it possible to differentiate numbers exactly from each other, when the knowledge of numbers is linked to the understanding of the seriation of quantities and understanding of cardinality. Furthermore, the knowledge of numbers gets connected to the protoquantitative increase-decrease-schema (ibid.).

Once this is achieved children can manage simple addition and subtraction tasks by counting up and down. So, according to Fuson (1992), before children understand formal terms such as 5+2=? or have received any formal arithmetic instruction, they are able to solve simple one-step-problems with the described integrated knowledge. 4-year-old children are already able to add small numbers by representing the amounts with objects or their fingers - they count out objects for the first addend, count out objects for the second addend, and then count all of the objects, (“counting-all-strategy” or “count from first”) (Briars & Larkin, 1984; Carpenter & Moser, 1983). Usually, learning to calculate begins with this simple kind of counting strategy. This first “counting-all-strategy” is acquired by most children before entering school (Siegler & Jenkins, 1989).

Early Strategies for Solving Word Problems

Children begin to use their counting skills to solve simple word problems and come to understand the meaning of addition and subtraction by developing proficiency in context situations (de Corte & Verschaffel, 2006; Fuson, 1992). Models on addition and subtraction and on solving word problems (Briars & Larkin, 1984; Riley & Greeno, 1988) assume that the numerical part-whole understanding develops by action-supported representation of addition and subtraction as counting operation. In order to solve a word problem, it is necessary either to transfer it into the part-whole schema or to model it with concrete objects. The availability of the part-whole concept is the decisive aspect which allows children to treat mathematical problems flexibly by interpreting the semantic structures of different addition and subtraction actions in parts and the whole. According to Briars and Larkin (1984), preschool children who do not yet possess abstract mathematical problem schemas can only solve numerical word problems with a *final-unknown* amount (e.g. “3 children are on a slide and 5 children on a climbing frame. How many children are on the playground altogether?”). In contrast, word problems with an *initial-unknown* amount cannot be solved successfully.

Pepper and Hunting (1998) also proved that 5-year-old children were able to solve simple addition and subtraction word problems when all quantities were visible on pictures. Tasks with one visible and one invisible quantity were solved by first mentally, representing the hidden quantity, and then using the “counting-on-strategy” for the visible quantity, e.g., the children were shown a picture of a farm, where they could see 6 rabbits in front of a hatch. They were told, that 3 rabbits are hidden in the hatch and then asked, how many rabbits are on the farm in total. This “counting-on-strategy” (Fuson, 1992) only becomes possible by means of an understanding of a concept of quantity. Thus, with increasing age, the counting strategies become shorter; children replace cumbersome strategies with shorter ones that make the process more efficient. They also generalize their strategies, so that they can apply them to problems with a similar underlying mathematical structure (Baroody, 1999; de Corte & Verschaffel, 2006). Two quantities are no longer counted beginning at 1; the first sum is understood as cardinal unit embedded in the whole and the second sum can be counted on. The cardinal principle brings a first understanding that the first addend forms a part of the whole (Fritz & Ricken, 2008). The cardinality integrates the concept of quantity and the understanding of ordinality. According to Dehaene (1997), an understanding of cardinality is neither innate nor does it unfold automatically, so that instructional implications are required.

Decomposition and Composition and Efficient Strategies

Building on the essential understanding of cardinality, the part-whole concept further develops insofar as the quantity relations become representable with numbers. Fritz and Ricken (2008) describe the beginning of the acquisition of the part-whole concept in their developmental stage model: related to arithmetic operations of adding and subtracting, the integration of the part-whole schema and quantitative ideas means that, children begin to see, bound to perception, the relations between parts and the whole quantity insofar that two parts are composed to a whole and a whole can again be decomposed into the two parts without a change. The comprehension that a quantity has a particular cardinality is a prerequisite for the understanding of a quantity consisting of composite units (Steffe et al., 1988). According to Piaget and Szeminska (1975), this additive composition is also the condition for the class inclusion regarding concrete quantities, i.e. the child can separate parts and reflect them as part of the whole.

The key concept to understand quantities as composite units is essential, e.g. 6 is made up of 3 plus 3, but also of 5 plus 1 and 4 plus 2 (Gerster & Schultz, 2004). When children have understood this ‘big idea’ of composing a whole out of various different parts (1+7, 2+6, 3+5 and 4+4=8 are recognized as related facts, as a family of facts that “sum to eight”), they can come in turn to grasp the ‘big idea’ of decomposition of a whole into various different parts (8=1+7, 2+6, 3+5, 4+4) (Baroody, 2006). This enables children to reflect on the maintenance of the whole after being decomposed into parts. Moreover, they learn to find decompositions of numbers on their own.

The principle of decomposition does not only refer to the relationship between parts and a whole, but equally to *single* parts. Children who use part-whole relations find different decompositions of one part quicker and are able to use effective calculating strategies. In this case, the child adds 8+6 in an easier way by first adding 2 and then 4 (Steffe et al., 1988; Gerster & Schultz, 2004; Baroody, 2006) or 8+6=14 as 5+5=10 and 3+1=4, therefore, 10+4=14. Carpenter et al. (1998) demonstrate the most frequent strategies they observed with second grade children, for example: 37+38=(30+30)+(7+8)=75 (combining-units strategy: the tens and ones are added separately), or 37+30=67 then 67+8=75 (sequential strategy: the sum is kept as a running total) or (35+35)+(2+3)=75 (compensating strategy: the numbers are adjusted to simplify the calculation).

When these principles are consolidated, it is possible to develop more efficient strategies for subtraction (Armstrong, 1991) and to appreciate the inverse relationship between the two operations (Baroody, 1999). "How might children explicitly or implicitly recognize the connection between their intuitive knowledge of subtraction and part-whole relations? (…) researchers found that the use of the complement principle to short-cut efforts to determine differences was associated with the relative efficiency of determining the sum of related addition combinations" (Baroody et al., 2003, p. 149). Due to this understanding of partial quantity relations, further effective strategies develop, such as the min-strategy (or "count-on-the-larger-summand-principle") (Siegler & Jenkins, 1989). That is, independent of their sequence, the addends can be added, and it is possible to calculate on the basis of the larger addend. Fritz and Ricken (2008) point out: at an earlier stage of calculating, the minuend is represented and children count backward by the value of the subtrahend. At an advanced primary school age, supplementary strategies are possible and children come to a solution faster by counting upward: Tasks of the kind 9-7=? are then solved by counting upward from the 7 to the 9. Usage of strategies like this shows that addition and subtraction are understood as complementary processes. Stern (1998) explains that the part-whole schema may be understood as an integration of mathematical principles, such as the commutativity law, the principle of inverse relation between addition and subtraction, and the principle of the additive composition of numbers.

Flexible Part-Whole Concept

An extended part-whole concept allows seeing the triadic structure of tasks consisting of three separate quantities. With the understanding of the number triple (see Fig. 4.1.1), significantly more flexible calculating is possible. Fritz and Ricken (2008) describe this important developmental step of recognizing connections between tasks: on this basis, additive and subtractive tasks on the final amount (6+7=x or 13-7=x), exchange amount (6+x=13 or 13-x=7) and initial amount (x+7=13 or x-7=6) are solvable. If the child can interpret the stable relationships between the three quantities by means of the part-whole schema and thus sees the addition and subtraction tasks as complementary, all these tasks are principally the same. According to the authors, this extended concept allows to model word problems to the initial amount, like "Some children are on the playground. 5 children must go home. Now 3 children remain on the playground. How many were there at the beginning?". If, however, children see this as a rigid instruction to count on from a certain quantity, this kind of task cannot be solved. The transition to a flexible concept continues up to the higher grades (ibid.). Studies with school children in grades 1, 2 and 5 (Stern, 1994; Langhorst et al., 2011) also showed that word problems with initial-unknown amounts continue to cause much more difficulties than problems with final-unknown or exchange amounts.

Early Instruction of the Part-Whole Concept

The integration of the described conceptual basic ideas into precise quantitative situations does not necessarily occur automatically and instruction should therefore not only begin with the entry to school, but rather before entering school (Sophian & McCorgray, 1994). A study by Fischer (1990) with 4 to 6-year-olds showed that early dealing with quantity relations strongly fosters the development of the concept of numbers. In Fischer's study, kindergarten children who were instructed on the basis of a "Part-Part-Whole Curriculum" were compared with a control group instructed on the basis of a "Count-Say-Write Curriculum". The children promoted by contents of the part-whole concept performed significantly better on a more strongly developed number concept. They were more successful in solving addition and subtraction word problems and developed greater understanding of place value in the base-10 numeration system than the reference group. According to Fischer (1990), the results indicate that early instruction that emphasizes set-subset relations is helpful for the development of basic number concepts and related skills.

An Australian-German comparison study by Clarke et al. (2008) with 5-year-old children at the beginning of kindergarten and 10 months after finishing their last year of kindergarten also proved the high efficiency of early training. The authors come to the conclusion that the preschool-year, which is obligatory for all children in Australia and offers daily instruction, is highly efficient for the mathematical development. The item on the part-whole understanding showed that shortly before entering school, nearly all of the German and Australian children were able to show a simple decomposition of the number 6 into 5+1 with their fingers. Finding further decomposition possibilities posed much bigger difficulties, e.g. 3 fingers on each hand. At the first and second time of measurement, this second kind of representation could only be found by 37 % and 56 % respectively of the German children. A third suitable possibility (4+2 fingers) could only be found by 18 % and 26 % respectively. The Australian children showed a remarkable increase of achievement: Their success rates for a second decomposition possibility increased from only 20 % to 73 %, for a third decomposition and its representation from only 8 % to 51 % (Clarke et al., 2008).

4.1.1.3.3 Compensation and Covariation

Finally, we want to elaborate on the development of understanding for two further requirement structures of the part-whole concept, compensation and covariation. They enable children to further specify the relation between parts and the whole and thus to find and understand effective and derivative strategies faster.

Compensation can be described as follows: The value of a whole remains the same, if one part of the whole is increased by the same amount by which a second part of the whole is decreased (law for addition) (Krauthausen & Scherer, 2007). A change in one part, which is compensated by a change in the other part, therefore, leads to no change of the whole, e.g. 3+5=(3+1)+(5-1)=8. Piaget (1965) presented a variety of studies regarding the compensatory relation of quantities. According to his findings, only 7-year-old children solved the following task successfully: “If a child eats 4 sweets in the morning and 4 sweets in the evening, has it eaten just as many sweets as the child who eats one sweet in the morning and 7 in the evening?”. Resnick (1992) emphasizes that children possess early understanding for the compensation of uncounted quantities. They recognize dynamic relations between parts and whole, before they understand that numbers also have these relations. The moment that the concept is acquired in abstract contexts is not clear. Thus, Willis (2000) interviewed 6-year-old children who knew that 4+2=6 and 3+3=6. Annie used her fingers and answered: “They both equal 6 because if you take one off the four and give it to the two to make it three, then it is 3 add 3 or you could take one off the three and give it to the other three and make 4+2. That's why both have to be the same” (p. 32 f.). Sam solved both tasks separately and he did not see any connection between these two tasks.

Covariation, the principle of operative changes, means that changes of a part lead to changes of the whole. The whole increases after an additive change of a part, e.g. if you increase a part by 1, then the whole increases by 1: 4+3=7, 4(+1)+3=7(+1), 5+3=8. The whole decreases after a subtractive change of a part. Later, this knowledge is used for derivations (e.g. 3+4=7, as 3+3=6).

Irwin (1996) examined 4 to 7-year-olds regarding their understanding of compensation and covariation and found out that children understand key part-whole aspects in an uncounted-quantities-context before they do in a counted-quantities context. “Children do have an understanding of the effect of changes to parts on an uncounted whole at a younger age than they understand similar changes in a quantified context or a numerical context" (Irwin 1996, p. 36). 4-year-old children already successfully recognized the effects of changes to one or more visible parts of an uncounted whole (e.g. subtractive covariation 100 %, compensation 83 %). 5 to 7-year-olds demonstrated understanding of compensation and covariation in nearly all uncounted quantity tasks. The success rates decreased if the tasks were presented with an unseen, counted quantity and precise results were asked for (4-years-old: covariation with object added: 42 %, covariation with object removed: 75 %, compensation: 58 %). More than two-thirds of the 5-and 6-year-olds and nearly all 7-years-olds could understand the effects of changes to unseen, counted quantities. The symbolic compensation task was the most difficult; the 4 and 5-year-olds did not manage it, 17 % of the 6-year-olds successfully solved it. Only the 7-year-olds solved this numerical equation with a rate of 92 %. The author concludes that children do understand compensation and covariation in non-numerical part-whole relationships before they enter school. It is suggested to teach numerical relationships based upon this protoquantitative understanding: "Children can be encouraged to keep their understanding of these relationships in mind as they develop their understanding of count-cardinal relationships, so that they can build their understanding of quantified part-whole relationships, and then numerical relationships, on their existing knowledge, rather than being encouraged to see out-of-school knowledge and school knowledge as separate entities." (Irwin, 1996, p. 39).

4.1.1.3.4 Connection Between Non-numerical and Numerical Part-Whole Understanding

Now the question arises how the non-numerical and the numerical part-whole understanding are connected. Resnick (1983) states: "Thus, it seems plausible that children may possess at least a simple version of the Part-Whole schema at a quite young age but may not yet have learned all of the situations where it is appropriate to apply it. Addition and subtraction of small numbers (...) may be one of the easy-to-recognize situations. Indeed, application of a primitive Part-Whole schema to simple number problems may be an important step in developing a more elaborate version, including many procedural connections, that will play a role in subsequent development of number knowledge" (p. 125). Sophian and McCorgray (1994) comply with Resnick's description: "5-year-olds have not yet integrated that relational knowledge with the counting process and/or knowledge of arithmetic combinations that would enable them to generate precisely correct responses“ (p. 18).

Baroody, Wilkins and Tiilikainen (2003) posit that multiple part-whole schemas are initially only loosely connected and consist of isolated parts. “Quantity-level schemas are relatively weak and, thus, still located in scope and disconnected, it makes sense that children’s early knowledge is compartmentalized” (p. 149). Baroody (1999) explains that the intuitive understanding, for instance of subtraction, and part-whole relations are loosely connected. This becomes evident when difficulties with solving initial-unknown problems arise: “That is, intuitively understanding that the starting amount of a take-away situation must be larger than either the amount taken away or the resulting amount is important relational knowledge but not necessarily tantamount to a deep understanding of part-whole relations – that a starting amount such as eight can be decomposed into two parts – five (the amount taken away) and three (the difference)” (Baroody et al., 2003, p. 149). The latter is a later, essentially more formal view on part-whole operations, which is closely connected with addition. Regarding the commutativity principle, the authors also stress: “It remains unclear whether an unary concept develops before, simultaneously with, or even after a binary concept, (…) evidence suggests that these two concepts of addition may not be initially integrated and subject to the same commutativity permission” (p. 156). Concerning the prevalent opinion that the construction of the part-whole concept underlies the complement principle (8-5=? as 5+?=8) (Briars & Larkin, 1984; Resnick, 1983), the question why this principle is not obvious to many kindergarten children or first-graders is answered by stating that previously used complement tasks are symbolic and do not connect with children’s intuitive understanding of part-whole relations (Baroody, 1999).

4.1.2. Overview of the Study

4.1.2.1 Research Questions

The present study follows the question discussed in the literature regarding the connection between the understanding of the part-whole concept in non-numerical and numerical domains (see Sect. 4.1.1.3.4). Previous studies often only took some part-whole contents into account. The aim of this study is to illuminate the complex part-whole concept in word problems by children aged 4 to 8 years. In order to achieve this, its availability is examined with a specifically developed test, which sets tasks as story problems on six part-whole contents. Our test covers the following contents: compensation, covariation, final amount, initial amount, finding and evaluating decompositions of amounts. These contents allow considering and precisely differentiating the non-numerical and numerical part-whole understanding. Answers to the following questions are expected to be found: are the non-numerical ideas the prerequisite for numerical ideas? Do separate competencies build up on each other hierarchically, and is it possible to identify levels of competencies? How are the children's performances distributed depending on their age and the potentially identified levels? Which connections can be derived between non-numerical and numerical achievements?

4.1.2.2 Method

4.1.2.2.1 Sample and Procedure

In March 2011, 181 children (86 girls, 95 boys) from four kindergartens and two primary schools in rural areas of the Ruhr area aged 4;0 - 8;7 years (M = 74,8; SD = 16,3) were examined in a cross-sectional research project. Four age groups were formed: 45 children from the medium kindergarten group (M = 54,6 months; SD = 3,2), 45 preschoolers in their last year at kindergarten (M = 65,5 months; SD = 3,7), 45 first graders (M = 82,5 months; SD = 4,0) and 46 second graders (M = 95,9 months; SD = 4,1). The examinations were carried out as single tests in a calm surrounding in the educational institutions in the mornings. So as not to ask too much of the children, sufficient breaks were made.

4.1.2.2.2 Instruments

The tasks were presented verbally as story problems in order to make the mathematical contents available also to kindergarten children. As described in Sect. 4.1.1.3, the part-whole concept comprises many different components. Six essential part-whole contents were selected to thoroughly assess the part-whole concept in word problems (see Table 4.1.1).

Table 4.1.1: Overview of the part-whole contents

Part-whole contents	
1. Final unknown-amount	A subset *(b)* is added to or subtracted from an initial amount *(a)* - statements on the effects on the final amount *(x)* are required: $a+b=x$ or $a-b=x$ (e.g. task 4 in Table 4.1.2)
2. Covariation	One or both subsets are changed – statements on the corresponding increasing or decreasing effects of these changes on the whole are required. In case of covariation, non-numerical task: The same amount c is each added to two different subsets $a>b$, then $a+c>b+c$ (e.g. task 1 in Table 4.1.2). Numerical task: $a+b=c$, after an additive change of one subset, the whole increases by this part *(d)*: $(a+d)+b=c+d$, after a subtractive change of one subset, the whole decreases by this part: $(a-d)+b=c-d$.

3. Compensation	A change in one part is compensated by a change in the other part – statements that this does not lead to an effect on the whole *(c)* are required. If $a+b=c$, then $(a+d)+(b-d)=c$ or $(a-d)+(b+d)=c$ (e.g. task 5 in Table 4.1.2)
4. Evaluation of decompositions	The whole is decomposed into several parts – statements on the maintenance of the whole are required.
	Two sets have the same amount $(a=a)$, this is shown or explained to the children. Then one total amount *(a)* is decomposed in $b+c+d$, children must evaluate is $b+c+d=a$? (e.g. task 3 in Table 4.1.2)
5. Decomposition	The whole has to be decomposed into parts by children on their own.
	$a+b+c=d$, children must find another decomposition $x+y+z=d$ (e.g. task 2 in Table 4.1.2)
6. Initial-unknown amount	A subset *(a)* is added to or subtracted from an unknown initial amount *(x)*; the whole *(b)* is known – statements on the unknown initial amount are required.
	$x+a=b$ or $x-a=b$ (e.g. task 4 in Table 4.1.2)

Each of the six contents comprised 5 tasks. They varied in their mathematical requirements and presentation level (see Table 4.1.2). The requirements were differentiated between non-numerical and numerical ideas of the part-whole concept. First, only the non-numerical tasks (1 to 3) were set, which only required imprecise answers with *"more, less, equal"*. Children had to carry out the tasks on three different levels of presentation. In order to establish to what extend the non-numerical part-whole understanding is bound to perception, we varied the level of difficulty: First, the word problems were presented with decorative pictures (task 1). The children were shown one picture for each content matter. The pictures did not contain mathematical information and, therefore, did not offer any help for solving the task (Ehlert et al., submitted). On the pictures, only animals and fantasy figures could be seen (e. g. two dragons, two fairies, hedgehogs, a cuckoo). The next tasks (2) were visualized with uncounted tiles. The children did not have to model them on their own. Only once, the children used the tiles to find decompositions on their own (see Table 4.1.2, cuckoo-task 2). Finally, the non-numerical tasks (3) were presented only verbally without material. Tasks 2 and 3 contained a numerical context with numbers, but no numerical answers were required (only "more, less, equal").

Then the numerical tasks (4 and 5) were set, which required precise answers *with numbers*. These tasks were presented to the children without pictures or materials. Children already knew the decorative pictures from task 1, showing them again would not have meant support for solving tasks 4 or 5. Further, we did not present the numerical tasks with tiles in order to avoid counting - once tiles are offered and visible, children can solve the tasks by simply *counting* the tiles. Yet counting is possible *without* having an understanding of the part-whole concept (Fuson, 1992, Fritz et al., in prep.). The authors, however, wanted to evoke numerical part-whole competencies. The numerical tasks (4) were set with small numbers up to 10, as the arithmetic ability was not to be examined, but the operational understanding. The respective fifth tasks were more difficult tasks up to 20 and their solutions required more than one calculating operation in most cases. For this reason, they were only presented to the school children. In some of the tasks 4 and 5, two questions were set to consider addition as well as subtraction in final-unknown and initial-unknown amounts (see Table 4.1.2, tasks 4) or additive and subtractive changes in covariation and compensation tasks. So in total, there were 39 story problems.

We decided to present each part-whole content in a different story context to make it more interesting for the children. The variation of the contexts was not of mathematical relevance and did not mean a change of the difficulty level. There were six story contents, one for each of the six contents (e.g. a dwarf story for all tasks on covariation). One by one, each content was presented in its story context while all 5 non-numerical and numerical tasks were requested consecutively.

Table 4.1.2: Tasks organized according to mathematical requirements and level of presentation

Task requirement and level of presentation	**Example items**
1. non-numerical task, without material, with decorative pictures	Content: Covariation The dwarf Redbeard has more gemstones than his brother Alberich. Both are given the same amount of gems by the rich dwarf king Goldemar. Which of the two now has more gems, or do both now have the same?
2. non-numerical task, with material (subitizing-quantity)	Content: Decomposition The cuckoo Egon has laid a lot of eggs. (*Point to some eggs, put 11in front of the child, do not count them*). Egon wants to put all eggs into 3 other bird nests (*point to 3 empty nests*). How can he divide the eggs on the nests? (*Let the child divide the eggs onto 3 nests*.) But the wife of the cuckoo is not content. She wants Egon to do it in a different way. How can Egon divide all the eggs on the nests in a different way? (*Remove all the eggs from the nests again and let the child distribute them from the beginning).*
3. non-numerical task, without material	Content: Evaluation of decompositions The dragon and his friend Saphira have the same amount of treasures. The dragon hides his treasures at only one hiding place in the wood. His friend Saphira hides all her treasures at 5 different places in the wood. Does the dragon have more or less treasures than his friend Saphira, or do both have the same?
4. numerical task, up to 10, without material	Content: Initial-unknown amount The raccoon Mr. Propper and his wife have collected nuts. The raccoon gives his wife 4 nuts. Now each of them has exactly the same amount of nuts. Both have five. How many nuts did the raccoon collect at the beginning? And how many nuts did his wife have before? Content: Final-unknown amount The fairy Holla and her mother each have 6 mushrooms. Holla is given 2 mushrooms by her mother. How many mushrooms does Holla have now? How many does her mother have?

5. numerical task, up to 20, more complex, without material	Content: Compensation The hedgehog Bono has 15 berries altogether, 7 berries are in one cave and 8 in another cave. He fetches 5 berries from one cave and puts them in the other cave. How many berries does he now have altogether in both caves?

4.1.2.3 Results

4.1.2.3.1 Non-numerical and Numerical Understanding of the Part-Whole Concept

In order to examine the connection between the non-numerical and numerical part-whole understanding, an explorative Rasch analysis was carried out. By means of a Rasch analysis, personal abilities and item difficulties can be considered on a common scale. If there is a connection between the item difficulty and the personal ability, both can be presented on the same latent dimension. The quality of the compliance between the data and the underlying Rasch model becomes interpretable by infit values. Infit statistics indicate the extent to which persons or items fit with the Rasch model, that is, they indicate "the degree of fit of observations to the Rasch-modeled expectations" (Bond & Fox, 2007, p. 310). In the optimal case these lie between 0.8 and 1.2 (Rost, 2004; Wright & Linacre, 1994) or in the still acceptable extension by ± 0.1, thus between 0.7 and 1.3 (Wright & Linacre, 1994). If the model is valid, the test records a one-dimensional model and all items measure the same latent personal quality. In our first explorative analysis, no compliance between a one-dimensional model and the data could be found (see Table 4.1.5).

The data situation rather required a two-dimensional Rasch model (variance one-dimensional = 5818.495, variance two-dimensional = 5726.720, $Chi^2 = 91.775$, $p < .001$). This model comprises all 39 items. The infit values of 36 items lie in the strict range between 0.80 and 1.20. Three items are situated in an acceptable range with infit values between 0.79 and 1.27 (see Table 4.1.5). With regard to contents, the two-dimensional Rasch model must be interpreted as follows: The first dimension contains the *non-numerical* tasks, which are to be answered with "more", "less" or "equal" (EAP/PV reliability = .848, variance = 1.118). The second dimension comprises all the *numerical* requirements (EAP/PV reliability = .883; variance = 4.293). Thus, two different domains of knowledge can be identified, while the competencies in the non-numerical dimension at a younger age develop earlier than those in the numerical dimension. The distribution of the difficulty and ability values shows that many tasks in the non-numerical dimension can already be accomplished by younger children who are not yet able to solve tasks in the numerical dimension. Although the two dimensions with $r = .88$ correlate highly, one must assume two different dimensions of competencies which can be interpreted in a theoretically meaningful way.

In the next step, the authors wanted to examine whether it is possible to identify reasonable interpretable levels of competencies *within* the dimensions. In this respect, the complex competence, which is shown on one dimension, is differentiated into competencies which build up on each other. It is thereby possible to allocate children's achievements to a particular level of competency on each dimension. Concerning the test construction, there were assumptions regarding the difficulty of the part-whole tasks on the basis of literature and own previous studies (Langhorst et al., 2011). Beyond the previous theoretical considerations, our classification (see Table 4.1.4) is mainly based on the empirically identified levels of difficulty of the tasks. On both dimensions two levels of competencies are differentiated:

Non-numerical Dimension 1

Typical for the *non-numerical* dimension 1 is the fact that the knowledge about decomposition of quantities, changes of quantities and effects on changes of parts is merely expressed in terms of "more/less/equal"-judgments (see Table 4.1.3).
Level of Competency 1

On level 1, part-whole tasks on the final and initial amount, covariation and decomposition can be solved with the help of *concrete material*. Children generally understand the principle of increasing. They show a first understanding of the part-whole concept of covariation, i.e. a whole increases after an additive change of a part (see Table 4.1.2, task 1). Without being able to quantify exactly, they furthermore develop a first understanding of simple decomposing by learning to decompose the whole into parts in different ways by concrete actions (see Table 4.1.2, task 2). They can already model the connection between quantities with material and formulate statements on the initial-unknown amount.

The ability to cope with the final-unknown amount corresponds to the protoquantitative "increase/decrease" schema, which enables children to state that a quantity increases by addition and decreases by subtraction (Resnick, 1989; Hunting, 2003). The ability to find decompositions of a quantity before these can be described in a numerical way is due to the understanding of the protoquantitative *part-whole schema* (Resnick, 1989). Irwin's study (1996) also proved that the covariant relations in non-numerical tasks might be understood early on.

Level of Competency 2

On the second level of competency of dimension 1, the non-numerical part-whole ideas are extended and all part-whole contents are tackled *without concrete material.* Children are able to understand part-whole relations in non-numerical addition and subtraction tasks and to figure out final-unknown and initial-unknown problems. They understand the effects of moving parts in compensation tasks. This idea seems to develop only after the understanding of the covariation principle. Now, it is possible to evaluate decomposition tasks with and without material, which implies that the principle of the maintenance of the whole is understood. This means that a whole that is decomposed has neither increased nor decreased (see Table 4.1.2, task 3). For this reason, finding simple decompositions without material is now possible.

Regarding the final and the initial-unknown problems, Sophian and McCorgray (1994) and Sophian and Vong (1995) stated in their studies that preschool children were not able to give a precise answer, but could point in the direction of the solution. The findings on solving covariation and compensation tasks confirm Resnick´s statement (1992) that children recognize relationships between the parts and the whole in quantities at an early stage, before they understand that numbers also have these relationships. Corresponding to this, Irwin (1996) also proved there was a good understanding concerning changes of part-whole relations in non-numerical tasks. In her study, however, this understanding was only examined bound to perception.

Table 4.1.3: Overview of levels of competencies on the non-numerical dimension 1

Dimension 1, non-numerical		
Level	**Problems**	**Description of the part-whole understanding**
Level 1	Part-whole tasks on the final and initial amount, covariation and decomposition can be solved non-numerically by concrete material.	Principles of increasing, simple decomposition, covariant changes on parts and simple quantity relationships are understood by material in case of non-numerical tasks.
Level 2	Part-whole tasks on the final and initial amount, covariation and decomposition can be solved without material in a non-numerical way. Part-whole tasks on compensation and evaluation of decompositions can be solved with and without material in a non-numerical way.	Understanding of all non-numerical part-whole principles: -Part-whole principles of level 1 are understood without material. -Part-whole relations are understood in an extended way (moving of parts and maintenance of quantity).

Numerical Dimension 2

It is typical for the *numerical* dimension 2 that the part-whole schema becomes quantifiable and part-whole relationships become presentable on the number level (see Table 4.1.4).

Level of Competency 1

On level 1, children acquire a numerical part-whole understanding. They can precisely solve simple tasks on covariation, compensation, and can evaluate decompositions within the number range up to 10. All requirements on additive and subtractive tasks to the final amount up to 20 are tackled. Finding the final amount proves the understanding of increasing and decreasing, but the reason for this ability may also result from good counting abilities and does not necessarily mean that children have really understood the connection between the three quantities yet (see Table 4.1.2, task 4). Tasks on compensation and covariation are numerically precisely definable, i.e. children acquire an understanding of the effects of manipulations on parts on the number level. What is more, children gain further insight into number relations. For this reason, simple tasks on the evaluation of decompositions become possible. Children now understand that a whole remains the same, even though it is decomposed in different ways.

Achievements on this level become possible because of described developmental processes: By combining the counting knowledge and the idea of the number line, quantities can be exactly represented (Resnick, 1992; Steffe et al., 1988). If the central idea of composition is understood on the number level, the central idea of decomposition is understood in the same way (Baroody, 2006). With the acquisition of cardinality, quantity relations become representable with numbers. According to Fritz and Ricken (2008), integration of the part-whole schema and quantitative ideas related to addition and subtraction mean that children begin to recognize the relations between parts and the whole. With this first numerical understanding of parts and whole, the effects of manipulating parts also become precisely definable (see also Irwin, 1996).

Level of Competency 2

On this level an extended numerical part-whole understanding is acquired. Children can now precisely solve more difficult tasks up to 20 (see Table 4.1.2, e. g. task 5). Part-whole ideas become more flexible, so additive and subtractive tasks on the initial amount are solved, i.e. children are capable of modeling the determined connection between the three quantities with numbers (see Table 4.1.2, task 4). Children finally succeed in finding decompositions of numbers up to 10 and 20. So they acquire the extended numerical understanding to see quantities as composed units, which allows flexible decomposing.

Fritz and Ricken (2008) describe comparable competencies on the last level of their developmental stage model by understanding the determined connection of quantities and of complementarity, tasks can be modeled, independent of whether they are provided as addition or subtraction, or whether the initial or the final amount is unknown. Regarding the finding of the initial amount, children increasingly have an understanding of the numerical equivalence and see through the triadic structure of numbers (Fuson, 1992; Resnick, 1983). Finding different decompositions of quantities (Clarke et al., 2008) means high requirements for an extended part-whole concept. This is especially valid for the current study in which 3 parts were asked for.

Table 4.1.4: Overview of levels of competencies on the numerical dimension 2

Dimension 2: numerical		
Level	**Problems**	**Description of the part-whole understanding**
Level 1	Simple part-whole tasks up to 10 on covariation, compensation and evaluation of decompositions and tasks on the final amount up to 20 can be solved in a numerical way.	Numerical part-whole understanding: -Principles of increasing and decreasing, of changing and moving subsets and of the maintenance of quantity are understood in simple, numerical tasks.
Level 2	More difficult part-whole tasks up to 20 on covariation, compensation and evaluation of decompositions can be solved in a numerical way. Part-whole tasks on the initial amount and decomposition up to 10 and 20 can be solved in a numerical way.	Extended numerical part-whole understanding: -Part-whole competencies on level 1 are further developed -Principle of decomposition is understood -Part-whole understanding becomes more flexible (Quantity contexts can be modeled and more complex decompositions can be found).

Table 4.1.5: Overview of Item-Parameter, Error of Item-Parameter, Item-Infit (MNSQ) of one-dimensional model and two-dimensional model, additionally for two-dimensional model assignment to dimension non-numerical / numerical (I / II) and level (1 / 2)

Item		**one-dimensional model**			**two-dimensional model**			
Context	**No.**	**Item-Parameter**	**Error**	**Item-Infit (MNSQ)**	**Item-Parameter**	**Error**	**Item-Infit (MNSQ)**	**dimension / level**
Final unknown-amount	1 (1)	-0.746	0.152	0.97	0.296	0.121	0.95	I / 2
	2	-3.994	0.239	0.96	-2.825	0.158	0.92	I / 1
	3	0.049	0.148	1.18	1.033	0.119	1.07	I / 2
	4	-0.031	0.154	0.81	-1.359	0.172	0.92	II / 1
	5	0.070	0.155	0.79	-1.218	0.174	0.93	II / 1
	6	0.125	0.196	1.01	-0.767	0.207	1.04	II / 1
	7	0.759	0.193	1.05	-0.072	0.204	1.11	II / 1
Covariation	8	-0.479	0.149	1.13	0.548	0.120	1.04	I / 2
	9	-2.403	0.187	0.98	-1.276	0.139	0.96	I / 1
	10	-0.175	0.151	1.06	0.823	0.120	0.96	I / 2
	11	0.564	0.157	0.92	-0.565	0.174	1.14	II / 1
	12	1.038	0.166	0.78	0.009	0.182	0.90	II / 1
	13	1.594	0.186	0.93	0.885	0.196	1.03	II / 2
	14	0.749	0.193	1.03	-0.090	0.203	1.07	II / 1
Compensation	15	-0.634	0.151	1.41	0.404	0.120	1.25	I / 2
	16	-0.671	0.151	1.01	0.368	0.121	0.91	I / 2
	17	-0.214	0.149	1.11	0.792	0.119	1.03	I / 2
	18	0.044	0.162	0.83	-1.349	0.180	1.02	II / 1
	19 (3)	-0.653	0.163	0.81	-2.255	0.180	0.88	II / 1
	20	1.655	0.196	0.93	0.908	0.207	1.08	II / 2
Evaluation of decompo-sitions	21	-0.538	0.150	1.43	0.493	0.120	1.27	I / 2
	22	-0.702	0.151	1.18	0.339	0.121	1.07	I / 2
	23	-0.179	0.149	1.09	0.819	0.119	0.99	I / 2
	24	0.390	0.157	0.76	-0.847	0.175	0.89	II / 1
	25	0.159	0.157	0.86	-1.155	0.175	1.03	II / 1
	26 (5)	2.463	0.199	0.99	1.846	0.210	1.12	II / 2
Decompo-sition	27	-0.196	0.153	0.80	0.801	0.121	0.79	I / 2
	28	-4.202	0.246	0.97	-3.054	0.160	0.95	I / 1
	29	-2.398	0.187	1.09	-1.280	0.139	1.06	I / 1
	30	-0.533	0.151	1.29	0.493	0.120	1.18	I / 2
	31 (4)	1.361	0.184	0.96	0.428	0.197	1.08	II / 2
	32	2.233	0.200	1.08	1.540	0.211	1.12	II / 2
Initial-unknown amount	33	-0.929	0.154	0.94	0.125	0.122	0.89	I / 2
	34	-1.596	0.165	0.89	-0.507	0.129	0.87	I / 1
	35 (2)	0.685	0.150	0.94	1.606	0.542	0.88	I / 2
	36	1.556	0.178	0.86	0.583	0.194	0.95	II / 2
	37	2.191	0.189	0.91	1.350	0.203	1.00	II / 2
	38	1.583	0.192	0.89	0.856	0.203	0.90	II / 2
	39	2.007	1.067	0.84	1.272	0.839	0.85	II / 2

(1) Item marks on dimension I the beginning of level 2
(2) Item marks on dimension I the ending of level 2
(3) Item marks on dimension II the beginning of level 1
(4) Item marks on dimension II the beginning of level 2
(5) Item marks on dimension II the ending of level 2

The WLE (Weighted Likelihood Estimator)-value estimates the mathematical competence on the individual level. For the assignment of the mathematical performance to a mathematical level the WLE-value has to be compared with the item-parameter. The smaller the item-parameter, the easier it is to solve the item. The discrepancy between the item-parameter and the WLE-value determines the assignment to the level. The smaller the discrepancy, the more likely it is that the mathematical competence of child is on the level to which the item is allocated.

4.1.2.3.2 Age-Related Distribution on the Levels of Competencies

Next, it is interesting to see how the children are distributed among these levels depending on their age. For this purpose, the age-related distributions are shown descriptively and analyzed via an ANOVA.

In the following, further levels of competencies were taken into consideration, which originate from the ceiling-effect. For the non-numerical dimension 1 a *level of competency > 2* was defined, where children are subsumed who are on a higher level than 2. On this level they solve all non-numerical tasks on the various part-whole contents without any difficulties. Similarly a *level of competency > 2* was defined for the numerical dimension 2. Children on this level > 2 can solve the numerical tasks on the different part-whole contents without any problems. On the other side a *level of competency 0* on the numerical dimension subsumes children who have not yet acquired *any* competencies to solve simple tasks with numerical requirements up to 10.

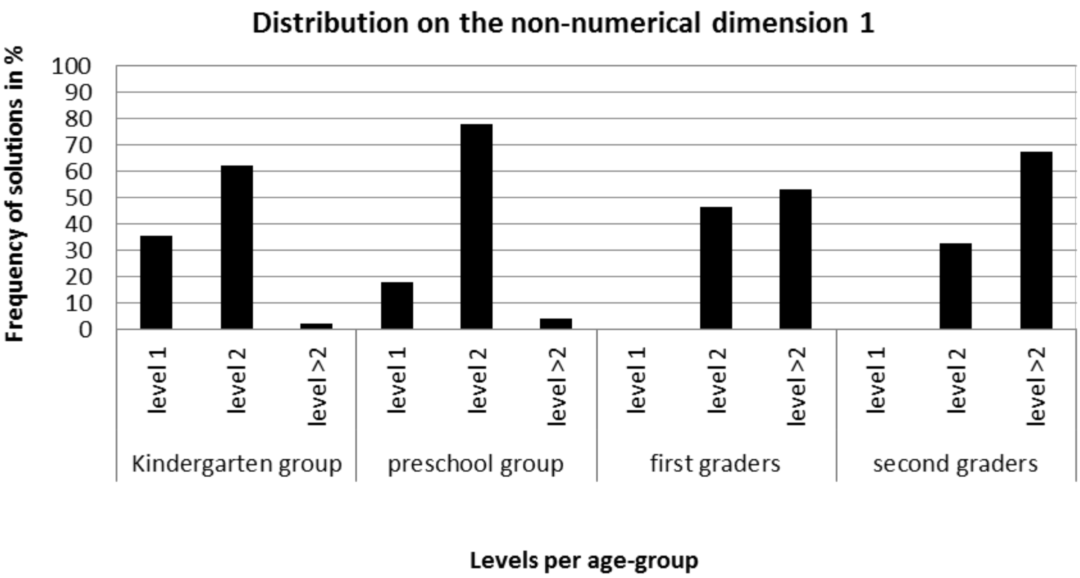


Figure: 4.1.2 Distribution on dimension 1 – non-numerical part-whole competencies

Results: On the first level of dimension 1 (see Fig. 4.1.2), 35.6 % of the children of the medium kindergarten group (M = 4.6 years old) and 17.8 % of the preschool children (M = 5.5 years old) are to be found. None of the school children (first graders: M = 6.10 years, second graders M = 7.11 years old) shows achievements on this low level. 62.2 % of the 4-year-old kindergarten children and 77.8 % of the preschool group reach the second level of dimension 1. Nearly half of the first graders (46.7 %) and one third of the second graders (32.6 %) also reach this level of competency 2. Only few of the kindergarten children, 2.2 % of the 4-year-olds and 4.4 % of the 5-year-olds, have deep non-numerical part-whole understanding on level > 2. As expected, most of the school children achieve level > 2, i.e. 53.3 % of the first graders and 67.4 % of the second graders. These children solve all non-numerical tasks confidently. Regarding their mathematical competencies, these children have understood the part-whole schema of non-numerical quantities and are able to confidently deal with the different requirements.

Figure 4.1.3 shows the distribution of the achievements on the numerical dimension 2. Three-quarters of the 4-year-old children (75.6 %) and one third of the 5-year-old preschool children (33.3 %) have a part-whole understanding on *level 0*. These children do not yet possess competencies to solve simple part-whole tasks in a numerical way. None of the school children shows accomplishments on this low level of development. About one quarter of the children of the medium kindergarten group (24.4 %) and nearly two-thirds of the preschool children (64.4 %) are to be found on level 1. 55.6 % of the first graders and still 21.7 % of the nearly 8-year-old second graders reach level 1. With the understanding on this level, children can solve simple tasks with numerical requirements. Regarding the distributions on level 2, it becomes evident that no 4-year-olds, but the first preschool children (2.2 %) are able to fulfill the requirements with an extended part-whole understanding on level 2. 40 % of the first graders and 52.2 % of the second graders are able to fulfill the difficult numerical requirements. None of the kindergarten children is beyond level 2 regarding its development. Only 4.4 % of the first graders, but 26.1 % of the second graders, are able to solve precise tasks very confidently and thus reach level > 2.

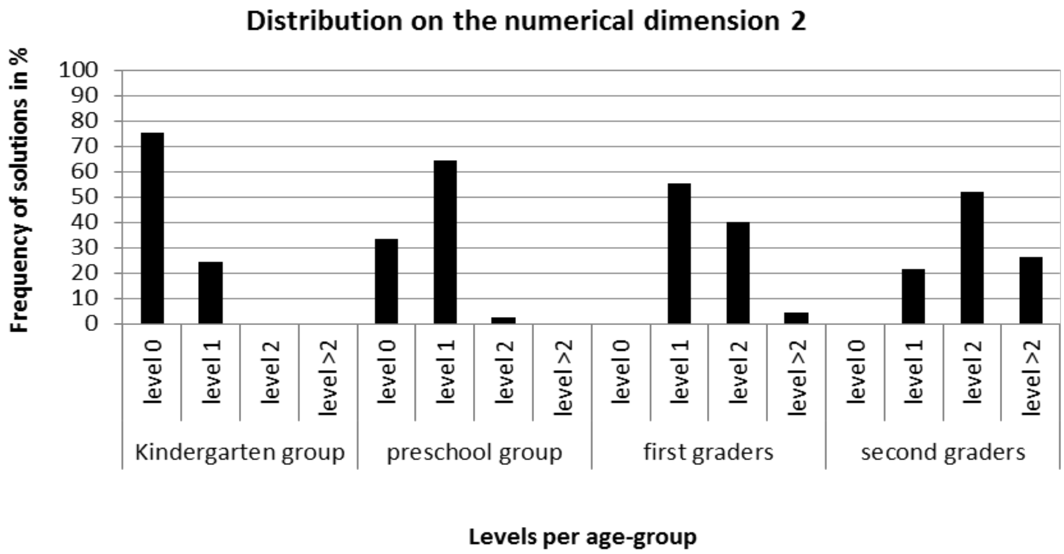


Figure: 4.1.3 Distribution on dimension 2 – numerical part-whole competencies

Comparing the age-dependent development of the part-whole concept (see Table 4.1.6) with an ANOVA (Post Hoc Scheffé-Test), it becomes evident that there are age-specific differences on both dimension 1 and dimension 2 (dimension 1: $F(3, 176) = 45.948$, $p < .001$, dimension 2: $F(3, 176) = 84.899$, $p < .001$). However, it also becomes clear in the Post Hoc-Test that the accomplishments of the children of the medium kindergarten group and those of the preschool children do *not* differ on dimension 1 (dimension 1: $p = .293$). Also, there are no age differences on dimension 1 between both groups of school children ($p = .600$). The Post Hoc-Tests on dimension 2 show age differences between all groups of children ($p < .01$ respectively $p < .001$).

Table 4.1.6: Overview of level-mean (M) and standard deviation (SD) per dimension

Age group	N	non-numerical dimension 1		numerical dimension 2	
		M	SD	M	SD
Kindergarten group	45	1.67	0.52	0.24	0.43
Preschool group	45	1.87	0.46	0.71	0.59
First graders	45	2.53	0.50	1.49	0.59
Second graders	46	2.67	0.47	2.04	0.70

The gender-specific differences were examined by a T-test. The analysis of the achievements did not uncover any gender-dependent differences (dimension 1: $T(181) = -.724$, $p = .470$, dimension 2: $T(180) = -.479$, $p = .632$). Therefore, boys and girls do not differ from one another regarding their understanding of the part-whole concept, independent of whether the tasks are offered in non-numerical or numerical contexts.

4.1.2.3.3 Which Connections can be Derived Between Non-numerical and Numerical Achievements?

In the following, the connection between the achievements on dimension 1 and 2 is examined more closely (see Table 4.1.7). There was no analysis of the connection between achievements on both dimensions for the kindergarten children, as they hardly reached level 2 on the numerical dimension. Nearly all kindergarten children were on level 0 or 1. In contrast to this, the consideration of the achievements of the school children, especially the first graders, was very revealing.

It was shown that 46.7 % of the first graders (N=21) are on level 2 of dimension 1. Of these children, 76.2 % achieve only *level 1* of the numerical dimension 2. Just about one quarter (23.8 %) already achieve level 2 of dimension 2. No first grader from dimension 1, level 2, reaches level > 2 in dimension 2. 53.3 % (N=24) of the first graders are on level > 2 of the *non-numerical* dimension. Of these, more than half (54.2 %) reach level 2 of dimension 2, 8.3 % of them even reach level > 2. Only about one third (37.5 %) of them was on *level 1* of dimension 2. This shows that first graders were able to tackle the requirements of dimension 2 depending on their acquired level on dimension 1.

This connection is not visible for the second graders. Here, it does not seem to be of consequence whether they are allocated on dimension 1 on level 2 or > 2. 32.6 % of the second graders (N=15) are on level 2 of dimension 1. Of these children, 60 % achieve *level 2* on dimension 2, and 20 % of them achieve level > *2*. 67.4 % (N=31) of the second graders are already on level > 2 of the *non-numerical* dimension 1. Of these children, nearly half (48.4 %) reach level 2 of dimension 2, nearly one third (29.4 %) of them is on level > 2. These findings prove that the non-numerical and numerical requirements are closely connected most certainly ($r = .712$, $p < 0.001$). It is striking that still about 20 % of both second graders groups are only allocated on *level 1* of dimension 2. They only have a first numerical part-whole understanding.

Table 4.1.7: Connection between achievements on the dimensions

Age group	non-numerical dimension 1:	numerical dimension 2:	Percentage of children
First graders	Children (N=21) allocated on non-numerical dimension 1 on **level 2** are distributed on dimension 2:	Level 1	76.2 %
		Level 2	23.8 %
		Level > 2	0.0%
	Children (N=24) allocated on non-numerical dimension 1 on **level > 2** are distributed on dimension 2:	Level 1	37.5 %
		Level 2	54.2 %
		Level > 2	8.3 %
Second graders	Children (N=15) allocated on non-numerical dimension 1 on **level 2** are distributed on dimension 2:	Level 1	20.0 %
		Level 2	60.0 %
		Level > 2	20.0 %
	Children (N=31) allocated on non-numerical dimension 1 on **level > 2** are distributed on dimension 2:	Level 1	22.6 %
		Level 2	48.4 %
		Level > 2	29.0 %

4.1.3. Discussion

The aim of this study was to examine the part-whole concept of children aged 4 to 8 years on the basis of word problems. The research focused on different part-whole contents related to the non-numerical and the numerical understanding. The main questions were whether the non-numerical understanding is a prerequisite for the numerical and in how far levels of competencies can be identified. To this aim, the availability of the part-whole concept was examined in a sample of 181 children (N=45 kindergarten children, N=45 preschool children, N=45 first graders, N=46 second graders) through tasks presented as word problems on different part-whole contents. In order to examine the non-numerical and the numerical understanding in word problems more closely, a Rasch analysis was accomplished. This can be considered as a new approach to ascertain whether we can find any hierarchical order in different part-whole contents and whether the non-numerical and the numerical understanding of the part-whole concept is hierarchically ordered in one dimension.

Do separate competencies build up on each other hierarchically and is it possible to identify levels of competencies?

The Rash analysis resulted in a two-dimensional model, by which two dimensions could be differentiated: one non-numerical dimension with part-whole tasks without number relation and one numerical dimension with tasks on exact quantification. These two dimensions are considered to be two different domains of knowledge, though they are highly correlated. It was possible to identify two hierarchical levels within each dimension. In evidence our study is based on word problems only, our interpretation is based on tasks of this kind in context situations.

In the non-numerical dimension, children first acquire a comprehension of part-whole relations with the help of concrete material though they are not yet able to describe them precisely with numbers. Children understand the principle of increasing and a simple form of decomposition. They show first ideas of covariant changes on subsets and are already capable of modeling relationships of quantities (level 1). Building up on this, children are able to tackle all non-numerical part-whole requirements in an abstract way. They recognize part-whole relationships without material in additive and subtractive tasks, widen their knowledge regarding decomposition, the effects of changes on subsets, and the principle of the maintenance of quantity (level 2).

In the numerical dimension, children show a first understanding of number relations of quantities regarding addition and subtraction as well as of simple changes on subsets and they understand the maintenance of quantity (level 1). Based on this, an extended, more flexible part-whole concept develops. Relations between parts and the whole are recognized. Complex tasks on the additive and subtractive solving of initial-unknown problems are accomplished. The determined connection between quantities is now understood in terms of numbers. Furthermore, it is possible to find different options of decomposition (level 2).

Are the non-numerical ideas the prerequisite for numerical ideas? How are the children distributed on the dimensions depending on their age and the found levels of competencies?

The two-dimensional part-whole model showed that children increasingly develop an insight into the relationships between parts and the whole on both dimensions, but that the complete understanding in the non-numerical dimension is no prerequisite for acquiring an understanding in the numerical dimension. However, the non-numerical understanding develops earlier and at a younger age. This is quite evident, as tasks in the non-numerical dimension are already tackled with material by younger children who are not yet able to solve one task in the numerical dimension. Obviously, children begin to build up a part-whole understanding based on concrete objects without any relation to numbers (Resnick, 1989; Steffe et al., 1988). The acquisition of this understanding seems to happen at a very early stage, as already approximately two-thirds of the 4-year-olds and nearly 80 % of the 5-year-old preschool children were able to solve non-numerical part-whole tasks on level 2 *without* material (see Table 4.1.2). This does, however, not mean that the numerical understanding develops generally earlier as 20 % of the second graders reached a higher level on dimension 2 than on dimension 1 (see Table 4.1.7).

The analysis of the dimensions also partly showed a parallel acquisition. This once again proves that children do not necessarily have to completely master the part-whole requirements on the non-numerical dimension before they can achieve an understanding of the numerical requirements: on the *numerical* dimension, simple part-whole contents can be understood also when the concept on the *non-numerical* dimension has not yet been fully acquired in all aspects. This becomes clear in the results for the preschool children – although only very few of them (4.4%) showed very firm non-numerical part-whole abilities (level >2), nearly two-thirds of them already solved simple numerical tasks.

Furthermore, it was stated that some aspects of the part-whole concept are particularly difficult. Thus, some requirements can be understood and modeled in a non-numerical way but are too difficult to be accomplished numerically. Baroody et al. (2003) interpret that some aspects of the part-whole schema are first only loosely connected. In the current study, this was the case for the complex competencies for finding the initial amount and decompositions. Non-numerically, *all* school children and even many kindergarten children tackled these tasks with the help of concrete material (level 1, dimension 1). However, none of the kindergarten children was able to find decompositions of numbers or to *precisely* determine the initial amount. In this context, the assumption of some authors can be confirmed that *preschool children* do not succeed in solving initial-unknown problems in a numerical way (Briars & Larkin, 1984; Riley & Greeno, 1988). It is remarkable that numerical requirements on finding the initial amount and decompositions are only acquired by *school children* at a very late stage, although this ability already exists for the relation between parts and the whole in the *non-numerical* dimension. 55.6 % of the first graders and 21.7 % of the second graders were still allocated on level 1 of dimension 2, which means that they still lacked the extended part-whole concept necessary for these tasks. This once again confirms the high level of difficulty of these requirements.

Regarding the numerical dimension, one quarter of the 4-year-olds and two-thirds of the 5-year-olds showed a first numerical part-whole understanding. Conversely, this means that three quarters of the 4-year-olds and one third of the 5-year-olds do not yet possess any competencies on the numerical solution of simple part-whole tasks (level 0). Sophian and McCorgray (1994) report similar research results, in which 4-year-olds were not able to solve any numerical word problems on the final amount, and 5-year-olds also still had problems with this. Hunting (2003) also reports that 4-year-olds are only capable of determining quantities with concrete objects up to three. Later, they are able to solve simple operations mentally; in case of more than three items, they require material. Briars and Larkin (1984) and Pepper and Hunting (1998) proved competencies on precise solutions of the final amount at the age of about 5. However, the finding of this study should not be overestimated, as no profound part-whole understanding is necessary for this. The tasks can also be tackled using simple counting strategies.

Which connections can be derived between non-numerical and numerical achievements?

The analysis of the connection between the achievements in both dimensions was of particular interest for the first graders (see Table 4.1.5). Nearly half of the first graders were still on level 2 of the *non-numerical* dimension. Most of these (76.2 %) reached level 1 of dimension 2, i.e. they had only a first numerical part-whole understanding. No first grader from dimension 1, level 2 was on level > 2 in the numerical dimension. This again proves the partly parallel acquisition of the non-numerical and numerical understanding of the part-whole concept. While the first graders already use formal calculations, they are still busy acquiring all ideas of non-numerical quantity relations. Of those first graders who already dealt with the different *non-numerical* part-whole requirements (53.3 % on level >2), more than half already reached level 2 of dimension 2. This means that the better first graders master the non-numerical part-whole problems, the better they manage numerical problems. The consideration of the connection of achievements of the second graders does not allow this conclusion. Many second graders were already very far advanced on the numerical dimension, even if they were not on level > 2 on dimension 1. 80 % achieved level 2 or > 2 on the numerical dimension, independent of whether they were on level 2 or > 2 of the non-numerical dimension. This on the one hand reconfirms the different domains of knowledge of both dimensions; on the other hand it underlines the finding of the entire study that the part-whole understanding continually increases with age in the numerical dimension. Still, we must stress here that only 21.7 % of the second graders were allocated on *level 1* of dimension 2, and thus only possess some first numerical part-whole competencies.

Educational Importance

Given that the part-whole concept is a central achievement within the mathematical competence acquisition and the basis of a large variety of further concepts, children must be able to apply a stable knowledge base. In this respect, the course of development must be known. This should be examined closer in a longitudinal study. With the present study, the identification of relevant levels during the acquisition of the part-whole concept has already become possible and approaches for the development and promotion of the concept can be derived.

The study revealed good preconditions of children working on part-whole contents through word problems. As a didactical consequence, word problems allow an early access to children's part-whole knowledge. They suggest themselves as an appropriate method for supporting children in discovering basic relations between quantities and later numbers. Resnick confirms that "a principal resource for promoting quantification of the schemas in school is the story problem. (...). Because the stories involve the same basic relationships among quantities as the proto-quantitative schemas" (1991, 34). In addition, Hasemann (2007) considers word problems to be good indicators for mathematical understanding because they show whether and to what extent children are able to recognize the relations between numbers.

It is of particular importance to connect the non-numerical with the numerical part-whole understanding, because otherwise some children might not transfer it to the numbers and remain stuck with the counting calculation. This can already take place in the kindergarten as a valuable preparation for school. According to Hasemann and Stern (2002), teaching in primary school must show that numbers are not only for counting but also for modeling *relationships* between quantities – this can be reached with demonstration material that children can manipulate flexibly. Moreover, Resnick (1983) recommends operations with small numbers because the "application of a primitive Part-Whole schema to simple number problems may be an important step in developing a more elaborate version" (p. 125).

The study has shown that children are still acquiring the part-whole concept during the first and second year at school. Only few first graders (4.4 %) and one quarter of the second graders were able to confidently master all part-whole requirements. Even in the middle of the second school year, the concept is thus still not completely developed. Therefore, instruction should not turn to formal arithmetic operations too soon.
The instruction of part-whole contents should not be restricted to addition and subtraction. It was shown that children also have knowledge regarding quantity and number relations in other part-whole contents. Supporting these abilities promotes the development in a positive way. The findings on the early, intuitive development in the non-numerical dimension provide important insights regarding the possible use of existing pre-knowledge of kindergarten children. Some training programs for elementary education acknowledge and even use the findings about the part-whole concept (e. g. Gerlach & Fritz, 2011; Krajewski et al., 2007). Several authors have already proved that explicit fostering instruction of contents of the part-whole concept is extremely important and effective (Fischer, 1990; Steinke, 2008; Young-Loveridge, 2002).

Finally, it would be interesting to have a closer look at the connection between visual spatial skills, especially competencies of structuring, and the part-whole concept, because an understanding of mathematical patterns and structure seems to be highly correlated to mathematical skills (Lüken, 2012).[3]

[3] Literaturangaben zu den Kapiteln 4.1 bis 4.4 befinden sich im Literaturverzeichnis unter Kapitel 6.

4.2. Studie II und III:

Das Teil-Teil-Ganze-Konzept - Voraussetzungen, Bedeutung und Nachhaltigkeit[4]

Als ganz wesentliche konzeptuelle Leistung im mathematischen Bereich der ersten beiden Schuljahre gilt ein umfassendes Teil-Teil-Ganze-Konzept von Zahlen. Auf diesem Verständnis beruhen die Fähigkeiten, effektive Rechenstrategien zu finden, Additions- und Subtraktionsaufgaben als Beziehungen zwischen Teil- und Gesamtmenge zu erkennen und entsprechende Aufgaben in Sachkontexten zu verstehen. In diesem Beitrag werden die Entwicklung und Bedeutung des Teil-Teil-Ganze-Konzepts sowie anhand von zwei Studien seine Verfügbarkeit bei Schulkindern vorgestellt.

4.2.1 Ausgangsproblematik

Wie gut werden folgende, typische Textaufgaben zum Teil-Teil-Ganze-Konzept im zweiten bzw. im fünften Schuljahr gelöst?

1. *»Tim hat 7 Euro ausgegeben. Jetzt hat er noch 6 Euro. Wie viel hatte er vorher?«*
2. *»Tim fährt in den Urlaub. Er hat 700 Euro. Nachdem er das Hotel bezahlt hat, hat er noch 430 Euro. Wie viel hat er für das Hotel bezahlt?«*

69 % lösten gegen Ende der Klasse 2 die erste Aufgabe und nur 61 % lösten Mitte der Klasse 5 die zweite Aufgabe. Wie ist zu erklären, dass ca. 30 % der Zweitklässler und beinahe 40 % der Fünftklässler diese Aufgaben nicht korrekt gerechnet haben? Im Folgenden wird gezeigt, dass Kinder für die erfolgreiche Bewältigung dieser Aufgabenformen über ein umfassendes Teil-Teil-Ganze-Konzept verfügen müssen.

4.2.2 Das Teil-Teil-Ganze-Konzept und seine Bedeutung

In der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten im Vor- und Grundschulalter gilt das Teil-Teil-Ganze-Konzept (TTG-Konzept) als Baustein von erheblicher Bedeutung. Darin realisiert sich die grundlegende mathematische Vorstellung, die Zahl als ein flexibles Teile-Ganzes zu begreifen, bei dem die Gesamtmenge immer erhalten bleibt, die Teilmengen sich jedoch unterschiedlich zusammensetzen können. Die Verinnerlichung des Konzepts um den

---

[4] Dieses Kapitel 4.2 entspricht einem Artikel, der in der Zeitschrift MNU Primar veröffentlicht wurde: Langhorst, P., Ehlert, A., & Fritz, A. (2011). Das Teil-Teil-Ganze-Konzept – Voraussetzungen, Bedeutung und Nachhaltigkeit. *MNU Primar. Das Journal für den frühen mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, *3*(1), 10-17.

Zusammenhang zwischen dem Ganzen und seinen Teilen (Abb. 4.2.1) bezeichnet Resnick (1983) gar als die größte konzeptuelle Errungenschaft der ersten Schuljahre.

Abbildung 4.2.1: Zusammenhang zwischen Teilmengen und Gesamtmenge

Richten wir den Blick darauf, was unter dem TTG-Konzept zu verstehen ist und welche zentrale Bedeutung es für den Aufbau eines erweiterten mathematischen Verständnisses hat.

In Abbildung 4.2.2 wird das TTG-Konzept in einfachen Zahlenmauern (vgl. z. B. Krauthausen, 1995) deutlich. Dargestellt ist die triadische Struktur von Zahlen. In dem Zahlentripel 13-6-7 sind 13 das Ganze und 6 und 7 die Teile (Resnick, 1983). Mit dem Begreifen dieser elementaren Beziehungen zwischen Teilmengen und der Gesamtmenge wird es Kindern möglich, die Addition und Subtraktion zu verstehen: die Deutung der Addition als die Zusammenfassung der Teilproportionen und die Subtraktion als das Abgrenzen einer bekannten Teilproportion von einem Ganzen (Gerster & Schultz, 2004).

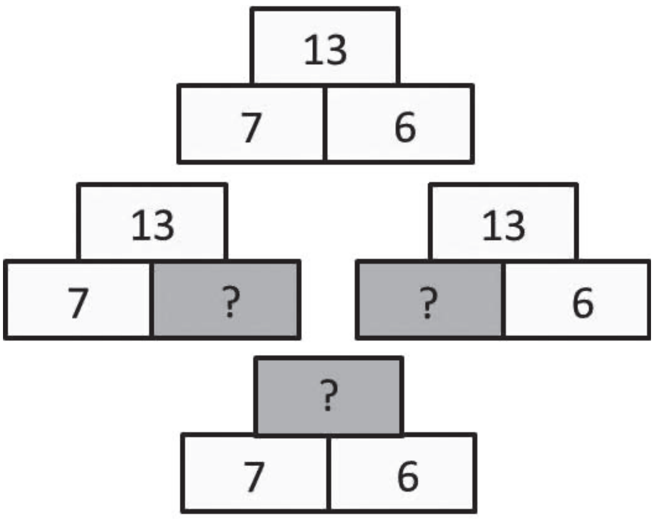


Abbildung 4.2.2: Triadische Struktur von Zahlen; aus den Angaben zu zwei Mengen kann die dritte erschlossen werden (Zahlenmauern) (in Anlehnung an Resnick, 1983)

Die Einsicht, dass sich die Zahl 13 aus den Teilen 6 und 7 zusammensetzt und sich in diese beiden Teile zerlegen lässt, ermöglicht das Lösen der Additionsaufgaben: 6 + 7 = 13 und 7 + 6 13 sowie umgekehrt das Lösen der Subtraktionsaufgaben: 13 – 6 = 7 und 13 – 7 = 6. Auf der Grundlage dieser Zahlbeziehungen wird eine Verknüpfung der Addition und Subtraktion möglich und Aufgaben, wie 6 + x = 13, x + 7 = 13 oder 13 – x = 6, x – 7 = 6 können effektiver und sicherer berechnet werden. „Unabhängig davon, ob eine Rechenanforderung additiv oder subtraktiv vorgegeben ist, ob die Gesamtmenge oder Teilmengen bzw. Austausch- oder Differenzmengen gesucht werden, liegt den Operationen immer eine solche triadische Struktur zugrunde." (Fritz & Ricken, 2008, 40).

Mit dem TTG-Konzepterwerb ist das Verständnis der Klasseninklusion (Piaget & Szeminska, 1975) verbunden. Dies meint, eine Gesamtklasse ins Verhältnis zu Teilklassen setzen zu können: *alle blauen* Murmeln sind Teile der Menge *aller* Murmeln. In der Menge 5 sind somit auch die Mengen 1, 2, 3 und 4 enthalten. Das TTG-Konzept beinhaltet demnach die Verständnisentwicklung für die Kompensation (das Ganze ändert sich nicht, wenn ein Element von einem Teil zu einem anderen Teil bewegt wird; auch als Konstanz der Summe bekannt) und für die Kovarianz (wenn man einen Teil eines Ganzen um eins vergrößert, vergrößert sich auch das Ganze um eins; auch als operative Veränderungen bekannt). Dadurch werden Transformationen zwischen Teilmengen und somit unterschiedliche Zerlegungen möglich, wie sie in Schulbüchern z. B. in Zahlenhäusern (Abb. 4.2.3) dargestellt werden (vgl. z. B. Wittmann & Müller, 2006).

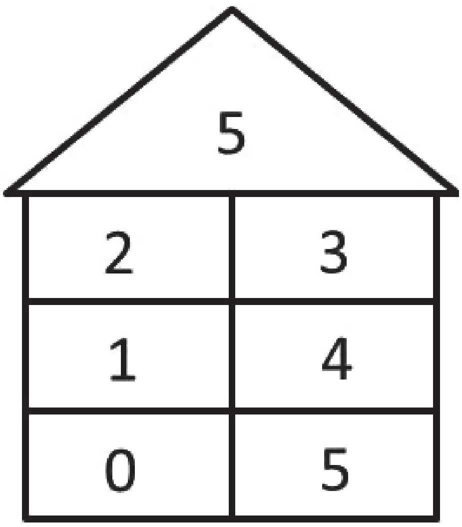


Abbildung 4.3.3: Zahlzerlegungen in einem Zahlenhaus

Das zusätzliche Wissen um die Veränderung einzelner Teilmengen erlaubt es nun, die *einzelnen* Teilmengen weiter zu zerlegen: 2 + 5 = 7 und 2 + 2 + 3 = 7 oder „Nachbaraufgaben“ zu finden: 3 + 3 = 6, also 3 + 4 = 7 (Kovarianz). Die Beherrschung des TTG-Konzepts führt Kinder von zählenden zu nichtzählenden Rechenstrategien hin und ist somit wichtige Voraussetzung für das schnelle Finden und Verstehen effektiver und ableitender Strategien.

Die Fähigkeit, Beziehungen zwischen Teilen und dem Ganzen zu sehen, ermöglicht einen Zugang zu Sachsituationen.

Diese Fähigkeit, determinierte Beziehungen zwischen Teilen und dem Ganzen zu sehen, ermöglicht einen Zugang zu Sachsituationen und schafft die Voraussetzung, mathematisch zu modellieren (Fritz & Ricken, 2008). Das Nachdenken über unterschiedliche Sachsituationen zu TTG-Beziehungen in Textaufgaben befähigt Kinder, flexibel und invers mit der Addition und Subtraktion zu operieren. Es ist wichtig, dass Kinder nicht nur die Subtraktion als Gegenoperation zur Addition verstehen, sondern auch umgekehrt (Resnick, 1989). Erst damit werden Textaufgaben lösbar, die zwar eine Subtraktion beschreiben, bezogen auf die Rechenhandlung aber das Ergänzen, also ein additives Denken, erfordern (vgl. auch Steinweg, 2009).

4.2.3 Entwicklung des TTG-Konzepts

Das TTG-Konzept baut auf vielen Schemata auf, die Kenntnisse über Mengenzerlegung und -zusammenfügung betreffen und sein Erwerb unterliegt einem längeren Lernprozess. Ein Vorverständnis entwickelt sich bereits früh, die Verinnerlichung findet gewöhnlich im ersten und zweiten Schuljahr statt und kann bis in das dritte Schuljahr hineinreichen. Im Folgenden wird dargestellt, welches mathematische Basiswissen Kinder erwerben müssen und welche erweiterten Fähigkeiten sie entwickeln sollten, um über ein umfassendes TTG-Konzept zu verfügen. Die Identifizierung kritischer Entwicklungsschritte beim Erwerb des TTG-Konzepts ermöglicht eine verständnissichernde Förderung und zielgerichtete Erkennung von Schwierigkeiten bei Kindern.

Zunächst können Kinder früh quantifizierende Einschätzungen verwenden. Lange bevor sie präzise rechnen können, sind sie in der Lage, Mengen und Objekte nach größer/kleiner und mehr/weniger zu unterscheiden. Sie erfahren in Alltagssituationen, dass Objekte oder Mengen zerleg- und zusammensetzbar sind, ohne dass sich ihre „Mächtigkeit“ ändert. So wird ein Apfel in Teile zerlegt, zusammengefügt sieht er wieder aus wie der unzerschnittene Apfel. Im Alter von 3–4 Jahren verfügen Kinder über dieses protoquantitative Konzept oh-

ne genaue numerische Quantifikation (Resnick, 1989; Fritz & Ricken, 2008). Ein wichtiger Schritt ist daneben die Zählentwicklung. Mit dem Erwerb der Zahlwortreihe und dem Wissen der 1-zu-1-Zuordnung (jedes Objekt erhält genau ein Zahlwort) gelingt es Kindern, Objekte zu zählen. Die protoquantitativen Schemata und Zählfertigkeiten sind zunächst zwei voneinander unabhängige Systeme, die im weiteren Entwicklungsverlauf miteinander verbunden werden müssen (Resnick, 1989). Erst durch diese Verbindung und auf dieser Basis entsteht im weiteren Entwicklungsverlauf ein tragfähiges, umfassendes TTG-Konzept, das ein Verständnis über die ordinalen, kardinalen und relationalen Beziehungen zwischen Zahlen einschließt:
Mit dem Ordinalzahlprinzip sind bereits einfache Additionen und Subtraktionen möglich, indem Kinder die Mengen auszählen (Fuson, 1988). Beruhend auf einem „mentalen Zahlenstrahl“ (Resnick, 1983) und einem daran orientierten Verständnis des Vermehrens und Verminderns, ist im Alter von 4 Jahren ein erstes Lösen einfacher Rechenoperationen durch Vorwärts- und Rückwärtszählen jeweils von 1 beginnend möglich: *»Du hast 3 Bonbons und bekommst noch 2 dazu. Wie viele hast Du dann?«.* Eine Einsicht in die Mächtigkeit (Kardinalität) von Mengen ist hier noch nicht gegeben (Fritz & Ricken, 2008).

Zu Schulbeginn vollzieht sich der Erwerb des sehr bedeutsamen Kardinalzahlprinzips (vgl. auch Benz, 2010). Die Einsicht, dass mit einem Zahlwort eine Menge mit einer bestimmten Anzahl gemeint ist, eine Menge also eine bestimmte Mächtigkeit hat, ist die Voraussetzung für das Verstehen, dass eine Menge aus einzelnen Elementen besteht, aus denen sie zusammengesetzt und in die sie wieder zerlegt werden kann. Beim Addieren müssen nun nicht länger bei 1 beginnend beide Summanden und dann die Gesamtmenge ausgezählt werden, sondern ausgehend von der ersten Teilmenge, die nun als kardinale Einheit verstanden wird, können die Kinder z. B. die Strategie des Weiterzählens nutzen, indem sie nur noch die zweite Anzahl hinzuzählen und dadurch die Gesamtmenge erhalten. Auf dieser Stufe bahnen sich damit erste Kompetenzen zum TTG-Verständnis an (Fuson, 1988; Fritz & Ricken, 2008).

Auf das Kardinalverständnis aufbauend differenziert sich das Wissen über TTG-Beziehungen dann weiter aus. Das Inklusionsverständnis, dass Mengen andere Mengen enthalten, entwickelt sich, so dass folgende Aufgabe gelingt: *»Gib mir 5 Bauklötze, 3 davon sollen rot sein.«* Hat ein Kind das TTG-Konzept noch nicht erworben, würde es zunächst 5 Bauklötze geben und dann noch 3 rote dazulegen. Mengen können nun zerlegt und wieder zusammengesetzt werden und die Beziehungen zwischen Zahlentripeln werden spezifiziert

(Fritz & Ricken, 2008). Die triadische Struktur der Aufgaben wird verstanden und als „numerische Äquivalenz“ gesehen, das heißt beide Teilmengen sind äquivalent zur Gesamtmenge (Fuson, 1988). Die Vorstellung von der Gegenläufigkeit der Rechenhandlungen lässt Kinder einerseits Aufgaben mit der einfachen Struktur ($a + b = c$ und $a – b = c$) lösen, andererseits ermöglicht die Einsicht in die Beziehungen von Zahlentripeln Aufgaben des schwierigeren Typs: $x \pm b = c$ oder $a \pm x = c$. Das Verständnis ist dahingehend erweitert, dass Kinder Mengen determiniert miteinander in Beziehung bringen können, unabhängig davon, wie die Komponenten des Tripels zueinander stehen: es müssen nur zwei Mengen bekannt sein, um die dritte bestimmen zu können. Mit diesem Verständnis können Kinder nicht mehr nur Aufgaben bewältigen, bei denen nach der Gesamtmenge gefragt wird, sondern auch nach der Austausch- oder Startmenge: *»Paul hat 9 Stifte, wie viele muss er sich noch nehmen, damit er insgesamt 15 Stifte hat?«* (Gesucht ist die Austauschmenge). *»Auf dem Klettergerüst sind einige Kinder. Es kommen 3 hinzu, jetzt sind 12 dort. Wie viele waren es zu Beginn?«* (Gesucht ist die Startmenge). Die Additions- und Subtraktionsoperationen erhalten dadurch eine erweiterte Bedeutung, die über das einfache Hinzufügen und Wegnehmen hinausgeht (Fritz & Ricken, 2008).

Im Zusammenhang mit der Entwicklung des TTG-Konzepts beschreiben Fritz & Ricken (2008) schließlich in der letzten Entwicklungsstufe die Bedeutung des Konzepts der Relationalität. Eine Verknüpfung der beiden Konzepte ist erforderlich für Aufgaben, bei denen beide Teilmengen nicht konkret benannt werden, sondern nur noch Relationen zwischen ihnen: *»Auf der Rutsche und auf dem Klettergerüst sind zusammen 10 Kinder. Auf der Rutsche sind 2 Kinder mehr als auf dem Klettergerüst. Wie viele sind auf der Rutsche, wie viele auf dem Klettergerüst?«* (vgl. Wittmann & Müller, 2006). Gesucht sind hier beide Teilmengen, gegeben ist die Relationsmenge. Erst mit einem relationalen Zahlverständnis und einem stabilen TTG-Konzept, das es erlaubt, die Teile zu finden, die nur durch eine bestimmte Beziehung zueinander beschrieben sind, sind diese komplexen Aufgabenformen lösbar.

4.2.4 Empirische Befunde zum TTG-Konzept

Bereits im Alter von fünf Jahren scheinen Kinder sensibel für das TTG-Konzept zu sein (Gerster & Schultz, 2004). Irwin (1996) untersuchte das Verständnis neuseeländischer Kinder zu protoquantitativen Mengenveränderungen. Es zeigte sich, dass 72 % der Vier-, 81 % der Fünf- und 92 % der Sechsjährigen bereits ein Vorverständnis zur Kompensation und Kovarianz hatten, wenn es sich um nicht-quantitative Mengen handelte. Mehrere Kindergartenstudien konnten belegen, dass sich das Konzept bereits früh fördern lässt. So führten 25 Fördereinheiten mit vielfältigen TTG-Aktivitäten bei 5–7jährigen Kindern im kleinen Zahlenraum im Vergleich zur Kontrollgruppe zu signifikant höheren Leistungen bei Sachaufgaben zur Addition und Subtraktion, obwohl diese nicht Förderinhalt waren (Fischer, 1990). Stern (1994) hat in zahlreichen Studien mit Erst- bis Drittklässlern zum Lösen von Textaufgaben zur Addition und Subtraktion gezeigt, wie sich Aufgaben mit exakt gleicher mathematischer Struktur in ihrem Schwierigkeitsgrad massiv unterscheiden können, in Abhängigkeit von der *gesuchten Menge*, nach der gefragt wird. Es zeigte sich, dass das Bewältigen vieler Textaufgaben ein fortgeschrittenes Wissen über TTG-Beziehungen erforderte. So wurden einfache Austauschaufgaben mit unbekannter Endmenge von fast allen Erstklässlern gelöst: *»Maria hatte 6 Murmeln. Dann gab sie Hans 4 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?«* (95 % Lösungshäufigkeit). Austauschaufgaben mit einer unbekannten Teilmenge stellten hingegen eine erhöhte Anforderung an das TTG-Verständnis und wurden von deutlich weniger Erstklässlern bewältigt: *»Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab sie Hans 2 Murmeln. Jetzt hat Maria 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?«* (38 % Lösungshäufigkeit).

4.2.5 Eine Studie mit Zweitklässlern[5]

4.2.5.1 Untersuchungsdesign

Um die Verfügbarkeit des TTG-Konzepts zur Addition und Subtraktion zu untersuchen, wurden von Mai bis Juli 2010 an 8 Grundschulen im Ruhrgebiet 245 Zweitklässler getestet. Der Test bestand aus 12 Aufgaben um das Zahlentripel 6-7-13, die während des Unterrichts zu bearbeiten waren.

Da beim Addieren und Subtrahieren ein voll entwickeltes Operationsverständnis erst dann vorliegt, wenn Verbindungen zwischen allen drei Repräsentationsebenen hergestellt werden können (Gerster & Schultz, 2004), wurden TTG-Aufgaben auf allen drei Ebenen präsentiert:

- bildhafte Vorstellungen von Quantitäten
- symbolische Schreibweisen für zugrundeliegende Rechenoperationen
- konkret beschriebene Sachsituationen.

[5] In dieser Arbeit wird diese Studie als Studie II bezeichnet.

In Bezug auf die Textaufgaben ergeben sich Schwierigkeitsunterschiede aus dem semantischen Aufgabentyp (Situationsmodell) und der gesuchten Menge (Stern, 1994). Aus den möglichen Aufgabentypen haben wir folgende herausgegriffen (Tab. 4.2.2 und 4.2.3):

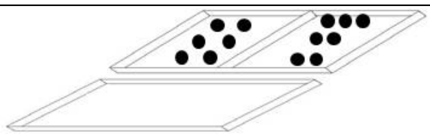
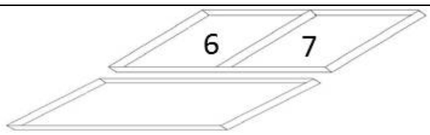
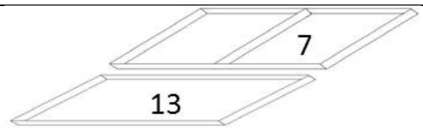
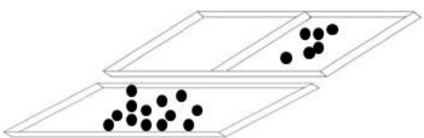
- Kombinationsaufgaben: Gesucht ist die Vereinigungsmenge
- Austauschaufgaben: Mengen nehmen als Folge von Austauschhandlungen zu oder ab. Gesucht ist die Startmenge, die Austauschmenge oder die Endmenge (jeweils additiv und subtraktiv modellierbar)
- Vergleichsaufgaben: Gesucht sind für den quantitativen Vergleich zweier Mengen („hat mehr/weniger als“) die Vergleichsmenge oder die Referenzmenge.

4.2.5.2 Ergebnisse

4.2.5.2.1 Abhängigkeit der Lösungshäufigkeiten von der Darstellungsform

Es zeigte sich, dass die Lösungshäufigkeit abhing von der Präsentationsform der Aufgaben, stärker aber noch von der semantischen Einkleidung und vom Aufgabentyp. Das Ermitteln der Mengen gelang auf bildhafter und symbolischer Ebene (Tab. 4.2.1) erwartungsgemäß besser als auf Ebene der Sachaufgaben (Tab. 4.2.2).

Tabelle 4.2.1: Lösungshäufigkeiten Schüttelbox-Aufgaben auf bildhafter bzw. symbolischer Ebene gegen Ende des 2. Schuljahres

Aufgabenstellung	Schüttelbox zur Aufgabenstellung	Richtige Lösung	Aufgabentyp
1. Kippe die Kugeln in die große Kiste. Wie viele sind es zusammen?		95 %	Kombinationsaufgabe Gesamtmenge gesucht (Addition)
2. Trage das Ergebnis in die große Kiste ein!		94 %	Kombinationsaufgabe Gesamtmenge gesucht (Addition)
3. Welche Zahl muss in die leere kleine Kiste?		89 %	Austauschaufgabe Austauschmenge gesucht
4. In der großen Kiste sind so viele Kugeln wie in den beiden kleinen Kisten zusammen. Wie viele Kugeln müssen in die leere kleine Kiste?		84 %	Austauschaufgabe Austauschmenge gesucht

Die Lösungshäufigkeit zeigt, dass das Verständnis auf konkret anschaulicher Ebene vorhanden ist.

Das Berechnen der Endmenge wurde auf allen Repräsentationsebenen überwiegend erfolgreich bewältigt. Auch das Finden einer Austauschmenge bereitete den Kindern kaum Schwierigkeiten. Probleme traten bei den Aufgaben mit unbekannter Startmenge und bei Vergleichsaufgaben auf, die ein zusätzliches relationales Zahlverständnis erforderten.

Tabelle 4.2.2: Lösungshäufigkeiten Austauschaufgaben als Text-Sachaufgaben gegen Ende des 2. Schuljahres

Aufgabenstellung	Richtige Lösung	Aufgabentyp
1. Ben hat 7 Murmeln und bekommt noch 6 dazu. Wie viele hat er jetzt?	96 %	Endmenge gesucht (Addition) 7 + 6 = x
2. Oma hat 13 Rosen. Sie gibt 7 an Lena ab. Wie viele hat Oma noch?	94 %	Endmenge gesucht (Subtraktion) 13 – 7 = x
3. In der Turnhalle sind schon einige Kinder. Es kommen 7 dazu. Jetzt sind es 13 Kinder. Wie viele waren es am Anfang?	90 %	Startmenge gesucht (Addition) x + 7 = 13
4. Tom hat 6 Stifte. Wie viele muss er noch nehmen, damit er 13 hat?	88 %	Austauschmenge gesucht (Addition) 6 + x = 13
5. Marie bekommt zum Geburtstag 6 Fische. Jetzt hat sie 13 Fische. Wie viele hatte sie vorher?	77 %	Startmenge gesucht (Addition) x + 6 = 13
6. Tim hat 7 Euro ausgegeben. Jetzt hat er noch 6 Euro. Wie viel hatte er vorher?	69 %	Startmenge gesucht (Subtraktion) x – 7 = 6

Tabelle 4.2.3: Lösungshäufigkeiten Vergleichsaufgaben gegen Ende des 2. Schuljahres

Aufgabenstellung	Richtige Lösung	Aufgabentyp
1. Lena hat 13 Bonbons. Sie hat 7 mehr als Max. Wie viele hat Max?	81 %	Referenzmenge unbekannt
2. Lisa hat einen Euro weniger als Niko. Zusammen haben sie 13 Euro. Wie viel hat Niko?	48 %	Beide Teilmengen unbekannt, Gesamtmenge und Differenzmenge bekannt

Betrachten wir die Ergebnisse im Einzelnen genauer: Die Schüttelboxaufgaben 1 und 2 (Tab. 4.2.1) wurden von fast allen Zweitklässlern gelöst, da nur eine einfache Additionshandlung gefordert ist. Bei den Schüttelboxaufgaben 3 und 4, die den Kindern seit dem 1. Schuljahr bekannt sein dürften, müssen die Kinder grundsätzlich über ein Inklusionsverständnis verfügen und verstehen, dass beide Teilmengen äquivalent zur Gesamtmenge sein müssen. Dieses Verständnis vorausgesetzt, können die Schüttelboxaufgaben auch zählend gelöst werden. Die Lösungshäufigkeit zeigt, dass dieses Verständnis auf konkret anschaulicher Ebene vorhanden ist. Bei den Austauschaufgaben (Tab. 4.2.2) konnten die Kinder nicht mehr auf eine bildhafte oder numerische Präsentation zurückgreifen. Für deren Lösung muss der Situationskontext modelliert werden. Der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgaben hängt davon ab, ob die Ergebnismenge, Austauschmenge oder Startmenge zu berechnen ist. Am leichtesten fiel den Kindern das Berechnen der Endmenge, sowohl über die Addition (Nr. 1) als auch über die Subtraktion (Nr. 2). Hier implizierte die sprachliche Formulierung eine einfache Handlung mit einer eindeutigen Zustandsänderung des Hinzufügens (Ben bekommt) und des Wegnehmens (Oma gibt ab). Auch die Aufgabe 4, bei der die Austauschmenge gesucht war, wurde häufig gelöst (88 %). Hier lag die Ergänzungsaufgabe $6 + x = 13$ nahe. Diese Austauschaufgaben können durch eine einfache Zählstrategie gelöst werden: zwei Teilmengen werden zusammengefügt bzw. es wird von einer Gesamtmenge eine Teilmenge abgezählt. Der Zusammenhang zwischen den beiden Teilmengen und der Gesamtmenge muss noch nicht verstanden sein. Beinahe alle Zweitklässler konnten Aufgaben dieses Typs lösen.

Das Berechnen der Startmenge fiel bei den Austauschaufgaben am schwersten. Warum sinkt die Lösungshäufigkeit bei diesem Aufgabentyp?

5) *»Marie bekommt zum Geburtstag 6 Fische. Jetzt hat sie 13 Fische. Wie viele hatte sie vorher?«* (77 % Lösungshäufigkeit)

6) *»Tim hat 7 Euro ausgegeben. Jetzt hat er noch 6 Euro. Wie viel hatte er vorher?«* (69 % Lösungshäufigkeit)

In beiden Aufgaben wird keine Startmenge benannt. Somit ist ein zählender Zugang zur Aufgabe nicht möglich. Es muss ein Situationsmodell erstellt werden, das die Modellierung der Aufgaben gestattet: $x + 6 = 13$ in $13 – 6 = x$. Der Zusammenhang zwischen den Teilmengen und der Gesamtmenge muss nun verstanden sein. Besonders die Aufgabe 6 erfordert eine flexible Anwendung des TTG-Konzepts: Dort wird gesagt, dass Tim Geld „ausgibt“ – auf der Sprachoberfläche wird „ausgeben“ mit Minus-Rechnen assoziiert. Diese sprachliche Hürde muss überwunden werden, um die Aufgabe korrekt zu modellieren. Wenn Kinder die Subtraktion nur als reine Handlung des Wegnehmens oder als Rückwärtszählen verstehen, kann diese Aufgabe nicht gelöst werden. Der triadische Zusammenhang des TTG-Konzepts ist damit noch nicht hinreichend verfügbar. Dass die sprachliche Einkleidung eine andere Flexibilität erfordert, zeigt der Vergleich der Aufgaben 3 und 5. In beiden sind die Handlungssituation und die gesuchte Menge gleich. Dennoch lösten 13 % mehr die Aufgabe 3 *»In der Turnhalle sind schon einige Kinder. Es kommen 7 dazu. Jetzt sind es 13 Kinder. Wie viele waren es am Anfang?«* (90 %). Hier werden sprachlich alle drei Mengen benannt: einige – dann noch 7 – jetzt 13. Diese chronologische Handlungsabfolge kann von Kindern gut nachvollzogen werden und legt die richtige Modellierung nahe. Bei Aufgabe 5 *»Wie viele Fische hatte Marie vorher?«* müssen Kinder hingegen erst konstruieren, nach welcher Menge gefragt ist. Es wird zudem kein zeitlich linear abfolgender Prozess geschildert wie in Aufgabe 3.

4.2.5.2.2 Vergleichsaufgaben als besondere Herausforderungen

Als besonders schwierig erwiesen sich Vergleichsaufgaben, die neben dem TTG-Konzept ein relationales Zahlverständnis erforderten (Tab. 4.2.3). Aufgabe 1, bei der die Referenzmenge gesucht war, wurde von 81 % der Kinder gelöst: *»Lena hat 13 Bonbons. Sie hat 7 mehr als Max. Wie viele hat Max?«.* Als auffallend am schwersten erwies sich die Vergleichsaufgabe 2, bei der beide Teilmengen unbekannt waren. Eine präzise Differenzbestimmung gelingt Kindern nicht, wenn sie das Prinzip der Relationalität nicht integrieren können. Die Hälfte der Kinder kam zu keiner Lösung: *»Lisa hat einen Euro weniger als Niko. Zusammen haben sie 13 Euro. Wie viel hat Niko?«* (48 % Lösungshäufigkeit).

Die Studie zeigt, dass die Zweitklässler bereits über Teilfertigkeiten des TTG-Konzepts verfügten, wenn es um einfache Additions- und Subtraktionshandlungen ging, die durch Anschauung oder durch sprachlich eindeutige Handlungsabfolgen unterstützt sind. Probleme wurden sichtbar, wenn Kinder keinen Anhaltspunkt zum Modellieren hatten. Das bedeutet, dass das TTG-Konzept noch nicht stabil erworben wurde, was ein nachhaltiges Hindernis beim mathematischen Problemlösen in späteren Jahren darstellen kann, wie die folgende Studie belegt.

4.2.6 Studie mit Fünftklässlern[6]

4.2.6.1 Untersuchungsdesign

In unserer zweiten Studie wurden von Dezember 2009 bis Mai 2010 1671 Fünftklässler aus 27 Schulen im Ruhrgebiet getestet. Die Stichprobe entsprach etwa der aktuellen Verteilung auf die Schulformen in NRW: 306 Hauptschüler[7] (HS), 245 Gesamtschüler (GE), 409 Realschüler (RS) und 711 Gymnasiasten (GY). Bei dem Test wurde die Frage nach der Verfügbarkeit des TTG-Konzepts in 17 Text- sowie 6 symbolischen Rechenaufgaben zu allen vier Grundrechenarten gestellt.

4.2.6.2 Ergebnisse

Aus Gründen der Vergleichbarkeit werden aus der Gesamtstudie nur die Ergebnisse von vier Text- und vier Rechenaufgaben zur Addition und Subtraktion sowie zwei Textaufgaben zum relationalen Zahlkonzept vorgestellt (Tab. 4.2.4 und 4.2.5).

Tabelle 4.2.4: Lösungshäufigkeiten Textaufgaben zur Addition und Subtraktion Mitte des 5. Schuljahres

Aufgabe	Lösungshäufig-keit sortiert nach Schulformen	Lösungshäufigkeit über alle Schulformen	Aufgabentyp
1. In einem Ferienlager stehen 35 Zelte. Dann werden einige abgebaut und es bleiben noch 27 stehen. Wie viele Zelte wurden abgebaut?	HS: 58 % GE: 57 % RS: 82 % GY: 96 %	80 %	Austauschaufgabe Austauschmenge gesucht 35 – x = 27
2. Auf dem Markt wurden am Freitag und Samstag zusammen 133 kg Kartoffeln verkauft. Am Freitag wurden 78 kg verkauft. Wie viel kg wurden am Samstag verkauft?	HS: 57 % GE: 67 % RS: 76 % GY: 89 %	76 %	Austauschaufgabe Austauschmenge gesucht 78 + x = 133
3. Laura hat am zweiten Tag der Klassenfahrt noch 12,50 Euro. Am ersten Tag hat sie 7,30 Euro ausgegeben. Wie viel Geld hatte sie am Anfang?	HS: 44 % GE: 47 % RS: 70 % GY: 83 %	68 %	Austauschaufgabe Startmenge gesucht x - 7,30 = 12,50
4. Tim fährt in den Urlaub. Er hat 700 Euro. Nachdem er das Hotel bezahlt hat, hat er noch 430 Euro. Wie viel hat er für das Hotel bezahlt?	HS: 35 % GE: 48 % RS: 63 % GY: 79 %	61 %	Austauschaufgabe Austauschmenge gesucht 700 – x = 430
5. Anita und Niko sparen ihr Taschengeld für einen Konzertbesuch und haben bereits 58 € zusammen. Niko hat 10 € mehr als Anita. Wie viel Geld hat Anita und wie viel hat Niko?	HS: 13 % GE: 22 % RS: 22 % GY: 40 %	28 %	Vergleichsaufgabe beide Teilmengen gesucht
6. Sarah und David haben zusammen 28 Plätzchen gegessen. David hat 6 Plätzchen weniger gegessen als Sarah. Wie viel hat David gegessen?	HS: 12 % GE: 16 % RS: 24 % GY: 27 %	22 %	Vergleichsaufgabe beide Teilmengen gesucht

[6] In dieser Arbeit wird diese Studie mit Studie III bezeichnet.

[7] Mit dem Begriff Schüler sind Schülerinnen und Schüler gemeint.

Tabelle 4.2.5: Lösungshäufigkeiten Austauschaufgaben zur Addition und Subtraktion in symbolischer Form zu Mitte des 5. Schuljahres

Aufgabe	Lösungshäufigkeit sortiert nach Schulformen	Lösungshäufigkeit über alle Schulformen	Aufgabentyp
1. __ + 37 = 63	HS: 69 % GE: 77 % RS: 83 % GY: 89 %	82 %	Startmenge gesucht
2. 417 + __ = 888	HS: 72 % GE: 69 % RS: 81 % GY: 88 %	80 %	Austauschmenge gesucht
3. 46 - __ = 12	HS: 46 % GE: 58 % RS: 73 % GY: 85 %	74 %	Austauschmenge gesucht
4. __ - 239 = 122	HS: 32 % GE: 34 % RS: 57 % GY: 71 %	55 %	Startmenge gesucht

Es zeigte sich, dass insbesondere die Hauptschüler große Probleme beim Lösen der TTG-Aufgaben hatten. Die Ergebnisse der Gesamtschüler lagen unter denen der Realschule und letztere unter denen der Gymnasiasten.

Auffällig war, dass die für diese Altersgruppe eigentlich als einfach zu bewertenden Austauschaufgaben nur geringe Lösungsquoten aufwiesen: *»Tim fährt in den Urlaub. Er hat 700 Euro. Nachdem er das Hotel bezahlt hat, hat er noch 430 Euro. Wie viel hat er bezahlt?«.* Nur 35 % der Hauptschüler und 79 % der Gymnasiasten lösten die Aufgabe 4. Auch die „Kartoffelaufgabe“ (Aufgabe 2), bei der durch additives Ergänzen die zweite Teilmenge zu ermitteln war, gelang bloß zu 57 % (HS) bzw. 67 % (GE). Aufgabe 3, eine sehr alltagstypische Aufgabe, wurde mit nur 44 % (HS), 47 % (GE), 70 % (RS) noch schwerer bewältigt. Es mag hier an der nicht eindeutig formulierten Handlungsabfolge und dem schwierigen Ankerwort „ausgeben“ liegen, dass Kinder die Startmenge nicht modellierten.

Dass die sprachliche Komplexität der Aufgaben die schwachen Leistungen der Fünftklässler nicht erklärt, zeigt sich an den Ergebnissen der Rechenaufgaben (Tab. 4.2.5). Die Kinder lösten die Text-Austauschaufgaben mit einer Häufigkeit zwischen 61–80 % und die symbolischen Rechenaufgaben zwischen 55–82 %. Obgleich sich die Aufgaben in der Grundstruktur ähneln sowie vergleichbare Zahlenräume umfassen, ziehen die Kinder kaum Vorteile bei der Bewältigung von TTG-Aufgaben ohne kontextuell sprachliche Einbettung.

Weitere gravierende Schwierigkeiten traten bei den Vergleichsaufgaben (relationales Zahlkonzept) auf. Nur 22 % der Kinder zeigten das erforderliche Relationsverständnis für die Aufgabe 6: *»Sarah und David haben zusammen 28 Plätzchen gegessen. David hat 6 Plätzchen weniger gegessen als Sarah. Wie viel hat David gegessen?«.* Hier zu modellieren, wie die Gesamtmenge aufgeteilt werden muss, gelang selbst nur 27 % der Gymnasiasten.

4.2.7 Zusammenfassung

Der Vergleich der Studien zeigt, dass die Zweitklässler die Austauschaufgaben (Tab. 4.2.2) mit durchschnittlich 86 % häufiger lösten als die Fünftklässler mit durchschnittlich 71 %, obwohl der Zahlenraum überschaubar klein war und die Aufgaben sprachlich einfach formuliert waren.

Um Mengenbeziehungen zu durchschauen, muss das Teil-Teil-Ganzes-Konzept anhaltend im Mathematikunterricht dargeboten und instruiert werden.

Wie lassen sich die Befunde erklären, dass es vielen Fünftklässlern schwerfiel, Zusammenhänge zwischen den Mengen zielführend zu interpretieren bzw. Aufgaben im bekannten symbolischen Format zu lösen? Mit den vorgegebenen Aufgaben zum TTG-Konzept wurden Anforderungen formuliert, die als „gekonnt“ vorausgesetzt werden. Das TTG-Konzept gilt als Basiskonzept, das Kinder in der Grundschulzeit erwerben müssen, um zu einem flexiblen Operationsverständnis und zu automatisierten Basisstrategien zu gelangen. Derartige Basiskonzepte sind im 5. Schuljahr nicht mehr Gegenstand des Unterrichts, dieses Wissen wird bei den Kindern vorausgesetzt. Im mathematischen Anfangsunterricht hingegen ist das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen obligatorischer Unterrichtsstoff. Elementare Zahlzerlegungen im kleinen Zahlenraum bis 20 werden stetig thematisiert. Auch im zweiten Schuljahr werden entsprechende Übungen auf der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene wiederkehrend behandelt. Dennoch haben die Leistungen der Zweitklässler gezeigt, dass bei einem Teil der Kinder (20–30 %) das Konzept nicht verinnerlicht ist. Sie konnten TTG-Aufgaben dann nicht mehr lösen, wenn die Beziehungen zwischen den Teilmengen und der Gesamtmenge selbstständig zu modellieren waren. Wie die Ergebnisse der Fünftklässler verdeutlichen, werden offensichtlich die Kenntnisse um das TTG-Konzept im Verlauf der Grundschulzeit nicht „von selbst“ verinnerlicht und damit das Verständnis nicht vollständig erworben. Dies hat zur Folge, dass derartige Anforderungen nicht sicher beherrscht werden. Vor allem vor dem Hintergrund, dass das TTG-Konzept Grundlage vieler darauf aufbauender mathematischer Konzepte und

Rechenoperationen ist (Stellenwert, Multiplikation, Division, Bruchrechnung), steht den Kindern keine ausreichende Basis für deren Erwerb zur Verfügung.

4.2.8 Schlussbemerkung

Der Beitrag hat gezeigt, werden Grundvorstellungen zum TTG-Konzept nicht fest verinnerlicht und bleiben Strategien unverstanden, hat das fortwährende Auswirkungen. Ein Versäumnis wird von allein nicht kompensiert, da sich das Konzept nicht von selbst im Laufe der Zeit entwickelt und einfach auswächst. Die Schwierigkeiten werden sich im größeren Zahlenraum sowie bei komplexeren Problemstellungen ausweiten. Um Mengenbeziehungen einsichtig und umfassend zu durchschauen, muss das Konzept demnach anhaltend im Mathematikunterricht dargeboten und instruiert werden. Um sich zu stabilisieren, muss es richtig erlernt und erarbeitet werden. Kinder sollten anschauungsgebunden zunächst hinreichende Vorstellungsfähigkeiten entwickeln können. Im kleinen Zahlenraum muss das Verständnis für die vielfältigen hinter dem Konzept liegenden Strukturen über gezielte Übungen aufgebaut und dauerhaft gefestigt werden. Damit Kinder TTG-Beziehungen flexibel interpretieren lernen, sind Aufgabenformen erforderlich, die Rechenleistungen auf mehreren Ebenen ansprechen. Erst mit der sicheren Beherrschung des TTG-Konzepts ist ein tragfähiges Fundament für erfolgreiches mathematisches Handeln und weiterführende mathematische Konzepte gelegt.

4.3 Studie IV und V: Mathematische Bildung im Kindergarten – Evaluation des Förderprogramms "Mina und der Maulwurf" und Betrachtung von Fortbildungsvarianten[8]

Zusammenfassung

Die große Bedeutung von Vorwissen in Mathematik für den späteren schulischen Erfolg im mathematischen Bereich ist belegt. Bildungspolitisch wird eine angemessene mathematische Bildung im Vorschulbereich für anschlussfähige Lernprozesse und den individuellen Bildungserfolg gefordert. In diesem Beitrag wird ein zur frühen mathematischen Bildung geeignetes Förderkonzept vorgestellt und erste empirische Wirksamkeitsbefunde dazu berichtet. In einer ersten Studie wird das Förderprogramm *Mina und der Maulwurf* auf kurz- und langfristige Effekte für Kinder im Vorschulalter evaluiert, in einer weiteren Studie wird seine unmittelbare Wirksamkeit für jüngere Kindergartenkinder untersucht. Da eine fachgerechte mathematische Bildung auch Überlegungen für eine geeignete Qualifizierung von Erzieherinnen[9] aufwirft, findet in der zweiten Studie die unterschiedliche Vermittlung von Professionswissen besondere Beachtung.

4.3.1 Grundlagen vorschulischer mathematischer Bildungs- und Lernprozesse

4.3.1.1 Frühe Bildung rechnet sich – zur Bedeutung des Vorwissens

Die vorschulische Bildung erfährt seit Untersuchungen wie der SCHOLASTIK- oder LOGIK-Studie (Weinert & Helmke, 1997; Weinert & Schneider, 1999) und insbesondere seit der ersten PISA-Studie (Baumert et al., 2001) in der Bildungsforschung eine anhaltend hohe Aufmerksamkeit. Die Studien belegten eine hohe interindividuelle Stabilität in den Leistungen vom letzten Kindergartenjahr über die Schuljahre hinweg und die Bedeutung be-

[8] Dieses Kapitel 4.3 entspricht einem Artikel, der in dem Band „Tests und Trends“ erschienen ist: Langhorst, P., Hildenbrand, C., Ehlert, A., Ricken, G. & Fritz, A. (2013). Mathematische Bildung im Kindergarten – Evaluation des Förderprogramms "Mina und der Maulwurf" und Betrachtung von Fortbildungsvarianten. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein *(Hrsg.), Diagnostik mathematischer Kompetenzen. Tests und Trends - Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, N.F., Bd. 11* (S. 113-134). Göttingen: Hogrefe.

[9] In diesem Beitrag wird der Begriff Erzieherinnen für die in Kindertageseinrichtungen tätigen pädagogischen Fachkräfte verwendet.

reichsspezifischen Vorwissens für die weitere Lernentwicklung. Krajewski und Schneider (2006) wiesen einen hohen Zusammenhang zwischen mengen- und zahlenbezogenem Vorwissen und Mathematikleistungen in der Grundschulzeit nach. Aunola, Leskinen, Lerkkanen und Nurmi (2004) zeigten überdies einen Schereneffekt auf, demzufolge sich Kinder, die bereits vor ihrer Einschulung über ein schwaches Mengen-Zahlen-Verständnis verfügten, in der Schule deutlich langsamer entwickelten.

Diese Befunde lassen einerseits eine möglichst frühe Prävention und Kompensation von Entwicklungsrückständen und andererseits eine Förderung *aller* Kinder sinnvoll erscheinen, um anschließende Bildungsprozesse zu erleichtern. Doch welche mathematischen Konzepte sind tragfähig, um sie im Vorschulalter in Förderprogramme umzusetzen?

4.3.1.2 Entwicklung früher mathematischer Konzepte

Zwei angeborene Kernsysteme befähigen bereits Säuglinge zum Erkennen und Vergleichen von globalen größeren Mengen (analoges Mengen-Repräsentations-System) und präzisen kleineren Mengen bis maximal 3 (präzises Mengen-Repräsentations-System) (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004). Beide Systeme differenzieren sich mit dem Erwerb verbaler Wissenssysteme weiter aus. Mit dem Spracherwerb folgen der Erwerb der Zahlwortreihe und, laut Resnick (1992), das Erlernen protoquantitativer Vorstellungen ohne numerisch präzisen Anzahlbezug: Mit dem Schema des Vergleichens beginnen Kinder im Alter von zwei Jahren, zwei Mengen mit mehr/weniger-Urteilen zu bewerten. Durch das Schema des Vermehrens und Verminderns begreifen und benennen sie ungefähr im Alter von 3 bis 4 Jahren numerisch unbestimmte Mengenoperationen. Das protoquantitative Teile-Ganze-Schema wird mit etwa 4 Jahren ausgebildet. Es betrifft das Verständnis von Beziehungen zwischen dem Ganzen und seinen Teilen ohne exakte Quantifizierung (vgl. ebd.). In einer Studie zur Entwicklung des Teile-Ganze-Konzepts (Langhorst, Ehlert & Fritz, 2012) zeigte sich, dass bereits zwei Drittel der 4-jährigen und beinahe 80 % der 5-jährigen Vorschulkinder nicht-numerische Teile-Ganze-Kontextaufgaben ohne Anschauung bewältigen konnten.

Nachdem sich Mengenwissen und Zählfertigkeiten zunächst isoliert voneinander entwickeln, vollzieht sich mit dem Erwerb der Zählprinzipien eine Integration beider Bereiche (u.a. Fuson, 1988; Resnick, 1983). Durch die Kopplung des Zahlenwissens mit dem Schema des Vermehrens und Verminderns werden allmählich exakte Mengen- und Zahloperationen möglich. Darüber hinaus müssen sich für die symbolische Zahlrepräsentation die zentralen Konzepte der Kardinalität, des Teile-Ganze-Schemas und des relationalen Zahlbegriffs entwickeln, die als wichtige Meilensteine beim Rechenerwerb gelten (Fritz & Ricken, 2008; Krajewski & Schneider, 2006; Resnick, 1983). Welche Komponenten im Einzelnen hinter den zentralen Konzepten stehen und wie diese aufeinander aufbauen, wird im Folgenden in dem Entwicklungsmodell für den Altersbereich von 4 - 8 Jahren von Fritz und Ricken (2008) beschrieben, das auf theoretischen Annahmen und empirischen Befunden beruht (u.a. Case & Okamoto, 1996; Fuson, 1988; Piaget & Szeminska, 1975; Resnick, 1983; Wynn, 1990).

4.3.1.3 Entwicklungsmodell zum Erwerb des Rechnen Lernens

Die Operationalisierungen der fünf aufeinander aufbauenden Niveaus für die numerische Zahlbegriffsentwicklung wurden in mehreren Studien mit insgesamt ca. 3000 Kindern überprüft, wobei das Modell in seinem Aufbau immer wieder repliziert werden konnte (Ricken, Fritz & Balzer, 2013).

Niveau I: Zählzahl

Im Alter von zwei bis drei Jahren beginnt der Erwerb der Zahlwortreihe. Das heißt, Kinder sagen die Zahlwörter zunächst als zusammenhängendes Wortgebilde (einszweidreivier) auf, ganz allmählich wird die Bedeutung von Zahlen als Zählzahlen konstruiert. Mit der Erkenntnis der 1-zu-1-Zuordnung werden Zahlwörter dann trennbar und sukzessiv einer Anzahl von Objekten zugewiesen (Fuson, 1988), so dass Kinder kleine Mengen sicher aus- und abzählen können.

Niveau II: ordinaler Zahlenstrahl

Die Zahlwortreihe wird allmählich als mentaler Zahlenstrahl repräsentiert, der sich zunächst ordinal darstellt mit der Vorstellung, dass die Zahlen in der Abfolge stetig größer werden. Kinder vergleichen mit vier bis fünf Jahren Zahlen über ihre Zahlposition: „Die 9 ist größer, weil sie *nach* der 5 kommt." Diese Konstruktion eines ordinalen Zahlenstrahls erlaubt zum einen die korrekte Bestimmung von Vorgänger- und Nachfolgerzahlen und zum anderen das numerisch präzise Addieren und Subtrahieren von Mengen durch zählendes Vorwärts- und Rückwärtsgehen auf dem Zahlenstrahl (Case & Okamoto, 1996). So wird über das verknüpfte Verständnis des Konzepts des Vermehrens und Verminderns mit der Zahlwortreihe ein Lösen einfacher Rechenoperationen möglich: „Du hast 3 Bonbons und bekommst noch 2 dazu." Alle Mengen werden mit eins beginnend einzeln gezählt. Das Ergebnis stellt für das Kind keine Summe dar, sondern verbleibt als Position in der Zahlwortreihe.

Niveau III: Kardinalität und Zerlegbarkeit

Im nächsten Schritt werden Zahlen als zusammengesetzte Einheiten begriffen, die die spezifische Mächtigkeit einer Menge repräsentieren. Kinder lernen, dass das letztgenannte Zahlwort für die Anzahl der gezählten Elemente steht. Die Integration von Zahlenstrahlvorstellung und Zählwissen zum Kardinalzahlkonzept erlaubt, die Zahlwortreihe als Sequenz aufsteigender kardinaler Einheiten zu erfassen und Zahlen auf der Ebene ihrer Mächtigkeit zu vergleichen.

Niveau IV: Enthaltensein und Klasseninklusion

Das Wissen über Mengen und ihre Beziehungen differenziert sich weiter aus. Zahlen sind zusammengesetzte Einheiten aus allen Elementen der Menge, die die Zahl repräsentiert. Sie können zerlegt werden, wobei die Summe der Teilmengen äquivalent zur Gesamtmenge ist (Fuson, 1992). Mit diesem Konzept werden flexible Zahlzerlegungen möglich, bevor das determinierte Beziehungsgefüge von Teilmenge-Teilmenge-Gesamtmenge verstanden wird. Das heißt aus der Angabe zweier Mengen kann die dritte Menge erschlossen werden. Das gilt für alle Aufgabentypen, unabhängig davon, ob eine additive oder subtraktive Rechenanforderung gegeben ist oder ob die Gesamtmenge, Austausch- oder Startmenge gesucht wird.

Niveau V: Relationalität

Mit dem relationalen Zahlbegriff (Stern, 1998) entwickelt sich das Verständnis für gleiche Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Zahlen. Kinder erreichen die Einsicht, dass Zahlen in der Zahlwortreihe immer gleichmäßig um 1 mehr werden und erkennen darauf beruhend, dass die Differenz zwischen den Mengen 4 und 6 ebenso 2 beträgt wie die Differenz zwischen 43 und 45. Zahlen werden also als Abstände in der Zahlwortreihe interpretierbar und stehen für eine Klasse kongruenter Intervalle, wodurch Differenzen zwischen zwei Mengen exakt quantifizierbar werden. Auf dem fünften Niveau, das etwa bis zum Alter von 8 Jahren entsteht, bauen weitere Konzepte auf, die im Rahmen der vorliegenden Studien nicht von Bedeutung sind.

4.3.1.4 Mathematische Bildung im Kindergarten

Auf die zu Beginn beschriebene Notwendigkeit der vorschulischen Bildung wurde durch den Beschluss der Jugendminister- und Kultusministerkonferenz in einem „Gemeinsamen Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen“ (2004) reagiert. In der Folge dieses bundesweit politisch legitimierten vorschulischen Bildungsauftrags entstanden auf Länderebene Bildungspläne für Kindertageseinrichtungen mit fachlichen Inhalten, explizit auch für den mathematischen Bereich.

> *Ein einheitliches Bildungskonzept für die Mathematik im vorschulischen Bereich ist aber bislang nicht zu erkennen. Der „gemeinsame Rahmen“ hat bisher nicht dazu beigetragen, ein solches zu entwickeln. (...) Hier besteht Forschungsbedarf, wie das Ziel der nachhaltigen Verankerung dieses Bereiches in Kindertagesstätten vor Ort tatsächlich erreicht werden kann.* (Royar, 2007, S. 44 f.).

Selbst wenn die bildungspolitische Frage nach geeigneten curricularen Plänen geklärt wäre, bliebe noch offen, „wie man fachlich fundiert, entwicklungsangemessen und didaktisch-pädagogisch kindgerecht die mathematische Bildung in der frühpädagogischen Praxis umsetzen kann“ (Fthenakis et al., 2009, S. 6). Es gilt also, Kriterien zu überlegen, die Orientierung für die Gestaltung einer geeigneten vorschulischen mathematischen Bildung geben können. In Anlehnung an Hellmich (2007) lassen sich die folgenden „Prinzipien für den Erwerb mathematischer Kompetenzen im Vorschulbereich (…), die eine konzeptionelle Grundlage für weiterführende Arbeiten darstellen können“ (S. 11), beschreiben.

Entwicklungsorientierte und systematische Konzeptualisierung

Mathematische Bildung im Kindergarten zu implementieren heißt, diese nicht als geschlossene, kurzzeitige Intervention anzulegen, sondern sie entwicklungsbegleitend zu gestalten, so dass die Kinder die zentralen mathematischen Konzepte, über die sie zum Zeitpunkt der Einschulung verfügen sollen, allmählich erwerben. Dabei sollten Angebote so vorgehalten werden, dass sie sich an Hierarchien von Kompetenzen bzw. Konzepten orientieren. Wichtig ist es daher, dass die frühe mathematische Bildung auf theoretisch begründeten, abgesicherten Konzepten beruht (Royar, 2007), wobei die Inhalte systematisch aufgebaut sein sollten und gezielt zu instruieren sind (Hellmich, 2007).

Professionswissen

Mathematische Bildung und Förderung im Kindergarten erfordert zwangsläufig eine Qualifizierung der Erzieherinnen (Hellmich, 2007). „Kein noch so gutes Material, kein noch so ausgefeilter Plan kann letztlich eine qualifizierte Aus- oder Fortbildung ersetzen.“ (Royar, 2007, S. 46). Es stellt sich daher die Frage, inwiefern das Professionswissen der Erzieherinnen die Gestaltung der mathematischen Bildung und damit den Wissenserwerb der Kinder beeinflusst.

Frühförderung schwacher Kinder

Über die an *alle* Kinder gerichtete mathematische Bildung hinaus muss die spezifische kompensatorische Frühförderung Beachtung finden. Hasselhorn (2010, S. 169) versteht unter Frühförderung eine präventive Intervention, um Kompetenzen „auffälliger Kinder“ zu steigern oder ungünstige individuelle Entwicklungsverläufe zu verhindern.

Spiel- und alltagsintegrierte Aktivitäten

Die didaktisch-methodische Umsetzung der mathematischen Bildung soll sich an der kindlichen Lebenswelt orientieren. Durch Spiel- und Lernprozesse treten Kinder mit ihrer Umgebung in Austausch (Fthenakis, 2009). Als geeignete Lehr-Lernsituationen, die unter anderem auch der Vermittlung einer positiven Einstellung zur Mathematik dienen sollen, werden spielerische Aktivitäten erachtet, die in Alltagssituationen oder z. B. in Geschichten eingebettet sind (Hellmich, 2007).

Metakognition

Neben der Wissensvermittlung sollte auch die metakognitive Auseinandersetzung mit dem eigenen Lernen unterstützt werden, da bereits Vorschulkinder über die Fähigkeit verfügen, sich Gedanken über ihr Lernen zu machen und diese mit anderen zu teilen (Hasselhorn & Gold, 2006). Strategien sollten verbalisiert und auf Ihre Anwendbarkeit und Effektivität hin reflektiert werden (Gerlach et al., 2007).

Diagnostik und Adaptivität

Förderung ist dann besonders wirksam, wenn sie diagnostisch begleitet und entsprechend der Fortschritte der Kinder angepasst wird (Walter, 2009).

Nachhaltigkeit

Eine mathematische Frühförderung sollte nachhaltige Effekte zeigen. Wenn tatsächlich Fähigkeiten oder Wissen entwickelt wurden, sollten sie noch nach mehreren Monaten zu belegen sein.

In den letzten Jahren sind verschiedene Programme für Kinder im Vorschulalter erschienen. Sie unterscheiden sich in ihrer Zielstellung, der Vermittlungsweise der Inhalte, der Ausgestaltung der Angebote, dem Einbezug diagnostischer Prozesse und dem Nachweis ihrer nachhaltigen Wirksamkeit. In Bezug auf die Zielsetzung sind einige Programme darauf ausgerichtet, Freude an der Mathematik zu wecken und mathematische Vorläuferfertigkeiten zu vermitteln, wie zum Beispiel *Das kleine Zahlenbuch* (Müller & Wittmann 2002, 2004), *Spielend Mathe* (Quaiser-Pohl, 2008) oder *Komm mit ins Zahlenland* (Friedrich & de Galgóczy, 2004). Auch die gezielte Nutzung von Bilderbüchern kann zu diesem Zugang gezählt werden (van den Heuvel-Panhuizen, 2012). Andere Programme fokussieren auf die gezielte Vermittlung zentraler mathematischer Konzepte im Vorschulalter, wie zum Beispiel das *Förderprogramm zur Entwicklung des Zahlkonzepts* (FEZ von Peucker & Weißhaupt, 2005) oder das Programm *Mengen, zählen, Zahlen* (MZZ von Krajewski, Nieding & Schneider, 2007). Explizit auf die frühe präventive Förderung potentieller Risikokinder ausgerichtet ist einzig das Förderprogramm von Grüßing und Peter-Koop (2008).

Die Programme gleichen sich darin, dass die Umsetzung der mathematischen Förderung spielerisch erfolgen soll, unterscheiden sich jedoch hinsichtlich ihres strukturierten Aufbaus und systematischen Vermittelns. Das Förderprogramm *MZZ* baut beispielsweise spezifische Vorläuferfertigkeiten gezielt auf, die aus einem dreistufigen Entwicklungsmodell abgeleitet werden. Demgegenüber verzichten spielorientierte Programme wie *Das kleine Zahlenbuch* und *Spielend Mathe* auf eine festgelegte Abfolge in der Vorgabe der Spielangebote. Nur in wenigen Programmen, beispielsweise im *MZZ* oder *FEZ,* wird das metakognitive Wissen betont – hier werden Strategien verbalisiert und Kontrollstrategien eingeübt. Diese beiden Programme verfügen auch über spezifische Diagnoseinstrumente für die summative Evaluation, die auf der Basis der theoretischen Grundlagen konstruiert sind. Grüßing und Peter-Koop (2008) wiesen durch eine formative Evaluation und eine entsprechende Adaptation der Förderung eine erfolgreiche Unterstützung potentieller Risikokinder nach. Alle benannten Programme belegten unmittelbare Trainingseffekte, wohingegen nachhaltige Wirkungen seltener gezeigt wurden. Die Ergebnisse der *MZZ*-Studie (Krajewski, Nieding & Schneider, 2008a) belegten für die geförderten Gruppen auch langfristig bessere Leistungen in den Mengen-Zahlen-Kompetenzen. Grüßing und Peter-Koop (2008) fanden für die Hälfte der Kinder am Ende der ersten Klasse nachhaltige Effekte.

Zusammenfassend ist anzumerken, dass effiziente Programme vorliegen, die zur Förderung im Vorschulalter eingesetzt werden können. Bezogen auf die bildungspolitische Überlegung, mathematische Bildung im Kindergarten fest zu verankern, ist jedoch festzuhalten, dass alle Programme noch keine entwicklungsbegleitende Förderung über einen langen Zeitraum bieten, da die Fördereinheiten zeitlich begrenzt und zumeist nur auf einen bestimmten Altersbereich bezogen sind. Letztlich finden die Möglichkeiten der Vermittlung eines entsprechenden Professionswissens von Erzieherinnen in den Programmen noch wenig Berücksichtigung.

4.3.1.5 *Mina und der Maulwurf* – ein mathematisches Förderprogramm

Ein entwicklungsorientiertes Förderprogramm für Kinder von 4 bis 8 Jahren haben Gerlach und Fritz (2011) auf der Grundlage des beschriebenen Entwicklungsmodells konzipiert. Das Programm *Mina und der Maulwurf* umfasst Inhalte für alle 5 skizzierten Entwicklungsniveaus und weitere Angebote zum Einstieg für jüngere oder entwicklungsverzögerte Kinder und ist dadurch über einen langen Zeitraum einsetzbar. Somit erfolgt die Förderung entwicklungsbegleitend und kann an die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und Lerntempi adaptiert werden. Das Programm ist einsetzbar für Kinder ab 4 Jahren bis hin zur Schuleingangsstufe.

Die Vermittlung der grundlegenden arithmetischen Fähigkeiten erfolgt systematisch in sechs aufeinander aufbauenden „Bausteinen". Baustein 0 behandelt elementare pränumerische Inhalte wie Merkmale erkennen, vergleichen, sortieren, Mengenvergleich und -schätzung und Reihenbildung. Baustein 1 fördert den Erwerb der zentralen Fertigkeit der korrekten 1-zu-1-Zuordnung zwischen Zahlwort und Zählobjekt sowie die Entwicklung eines ersten Anzahlbegriffs durch die Verbindung von Zahl und Menge. Baustein 2 fokussiert auf das Anzahlkonzept und vertieft die Verbindung von Zahlwortreihe und Menge. Baustein 3 erarbeitet das Konzept der Zerlegbarkeit. Baustein 4 erweitert das „Rechnen" im Sinne von Teilmengenoperationen mit Inhalten zum Enthaltensein und zur Flexibilisierung des Teile-Ganze-Verständnisses. Baustein 5 behandelt bereits auf sehr elementare Weise durch entsprechende Kontextwahl und konkrete Handlungsmöglichkeiten den Mengenvergleich als Differenzbestimmung und relationale Zahlbezüge.

Die Bausteine des Programms folgen den Niveaus des Entwicklungsmodells. Ein Einstieg in das Programm ist entsprechend der Entwicklungsvoraussetzungen mit jedem Baustein möglich und in Passung mit dem diagnostizierten Lernstand durchführbar. Die Inhalte werden in strukturierter Vorgehensweise vermittelt und durch spielerisches und alltagsintegriertes Lernen ergänzt.

Den Kern des Konzepts stellen Geschichten und daran anschließende gemeinsame angeleitete Übungen dar, die den Fokus auf die Verbalisierung und Reflexion legen. Ausgestattet mit einer Handpuppe führt die Erzieherin mit einer Geschichte zum Einstieg eines jeden Inhaltsbereichs die Kinder in eine Wald- und Wiesenwelt, in der die Protagonistin, die Biene „Mina", Abenteuer erlebt. Jede der 27 Geschichten wirft einen mathematischen Konflikt auf, den es seitens der Kinder zu lösen gilt. Durch den Einsatz von Geschichten wird das Mathematiklernen in die kindliche Lebenswelt eingebunden und zeigt auf, wofür Mathematik nützlich ist. Die folgende gekürzte Version einer Geschichte dient z. B. als Ausgangspunkt zur Auseinandersetzung mit den Zählprinzipien:

Mina trifft die Raupe Mathilda. Mina prahlt: "Ich kann schon ganz toll zählen!". Also fragt Mathilda sie: "Wie viele Raupenhöcker habe ich?" Mina beginnt zu zählen: "1, 2, 3, 4, 5, 6 usw." (Sie schaut dabei nicht zur Raupe). Sie weiß absolut nicht, wie sie durch Ihr Zählen herausfinden kann, wie viele Raupenhöcker Mathilda hat. Also antwortet sie vorsichtig: "Du hast so ca. 5 oder 100 Höcker?!". Nun braucht sie die Hilfe der Kinder.

Während des Vorlesens wird ein Bilderbuch mit zu der Geschichte passenden Illustrationen betrachtet, die weitere Gesprächsanlässe bieten, wie: „Kannst Du Mathildas Raupenhöcker zählen?". Die Problemsituation am Ende der Geschichte erfordert eine eigenständige Konstruktion von Lösungen. In einem sich anschließenden instruktionalen Setting erfolgt die gezielte Auseinandersetzung mit dem mathematischen Problem. Für diese gemeinsame vertiefende Übung im Sitzkreis stehen den Erzieherinnen Aufgabenkarten mit Sprechtexten und konkreten Durchführungshinweisen zur Verfügung. Strategien werden von den Kindern verbalisiert und Kontroll- und Reflexionsstrategien werden gezielt angeregt und vermittelt. Für ein Lernen in der heterogen zusammengesetzten Gruppe enthalten die Aufgabenkarten oftmals unterschiedliche Strategieniveaus, d. h. für einfache und für elaboriertere Strategien, die ein höheres Konzeptwissen erfordern.

Die Erzieherinnen können die Fördereinheiten ausdehnen, je nach Lerntempo und Interesse der Kinder. Zur gezielten Vertiefung eines jeden der 48 Inhaltsbereiche dienen abwechslungsreiche Formen kindlichen Lernens, die den mathematischen Anforderungen des jeweils zu fördernden Inhalts entsprechen. Im zugehörigen Handbuch findet sich eine Vielzahl an spielerischen Aktivitäten (Bewegungs- und Gesellschaftsspiele, Lieder, Reime), die den jeweiligen Inhalt ergänzen. Zur Integration der Inhalte in den Kindergartenalltag werden Tipps gegeben. Fakultativ werden Materialien für eine Mathe-Ecke und differenzierte Arbeitsblätter vorgeschlagen. Das Handbuch offeriert auch vielfältige bereichsübergreifende Lernmöglichkeiten.

Die Förderung ist diagnostisch eingebunden. Die Fähigkeiten der Kinder können mit dem MARKO-D-Test (s.u.) erhoben werden, um den Lernstand zu Beginn und nach der Förderung zu bestimmen. In diesem Zusammenhang ist die Fachkompetenz der Erzieherinnen ebenso gefragt wie beim Verständnis der theoretischen und didaktischen Hintergründe der Förderung.

4.3.2 Evaluationsstudien zum Förderprogramm

In zwei Studien wurde die Effektivität des Programms *Mina und der Maulwurf* sowohl für jüngere Kindergartenkinder als auch für Vorschulkinder untersucht. In beiden Studien besuchten Erzieherinnen von den Universitäten initiierte Fortbildungen. Dafür wurde ein Fortbildungskonzept für die Umsetzung des Förderprogramms entwickelt und in beiden Studien vergleichbar eingesetzt. Da die Frage ungeklärt ist, wie viel theoretischer Input für eine erfolgreiche Förderung erforderlich ist (Souvignier & Förster, 2011), wurde in der zweiten Studie zudem eine Fortbildungsvariante durchgeführt, in der Erzieherinnen eine theoretische Aufbereitung erhielten und eigene Ideen zur Umsetzung der niveauspezifischen Anforderungen entwickelten. Diese wurden alltagsintegriert umgesetzt und mit den Effekten der Fortbildung verglichen, in der die konkreten Trainingsinhalte vorbereitet wurden.

4.3.2.1 Studie I[10]

In Studie I wurde der Frage nachgegangen, welche kurz- und langfristigen Wirkungen von der 6-monatigen Förderung mit dem Programm *Mina und der Maulwurf* für Kinder im Jahr vor der Einschulung zu erwarten sind, und ob ihnen damit verbesserte Startchancen für den Schulbeginn bzw. auch nachhaltig günstigere Lernvoraussetzungen gegeben werden können.

[10] In dieser Arbeit wird diese eigene Längsschnittstudie als Studie IV bezeichnet.

4.3.2.1.1 Untersuchungsdesign und Durchführung

Der Studie lag eine quasi-experimentelle Versuchsanordnung mit einer Treatment- und einer Kontrollgruppe zugrunde. Die Treatmentgruppe wurde 6 Monate von Januar bis Ende Juni 2010 regelmäßig in Kleingruppen von 6-12 Kindern mit dem Förderkonzept *Mina und der Maulwurf* gefördert. Die Erzieherinnen führten das Fördertraining eigenständig in wöchentlichen Fördereinheiten von 45 Minuten durch. Darüber hinaus förderten sie die Kinder im Alltag mit den fakultativen Angeboten des Programms, wobei sie je nach dem Entwicklungstempo der Kinder differenziert vorgingen. Am Ende hatten alle Kindergärten die Inhalte des Bausteins 3 abgeschlossen und teilweise mit Baustein 4 begonnen. Einmal monatlich wurden insgesamt sechs *Fortbildungsveranstaltungen* zu je drei Zeitstunden zur Vorbereitung und Begleitung der Umsetzung des Fördertrainings an der Universität Duisburg-Essen durchgeführt, an denen ein bis zwei Erzieherinnen jeder Einrichtung teilnahmen. In den Fortbildungen wurden die theoretischen Hintergründe des Trainings und die Förderinhalte bis Baustein 4 vermittelt. Die Kontrollgruppe führte ihr Kindergartenprogramm wie gewohnt durch und erhielt keine Anleitung zur mathematischen Förderung. In einem Prä-/Post-/Follow-up-Design wurden die mathematischen und kognitiven Leistungen der Kinder von geschulten externen Testleiter/inne/n erhoben: im November 2009, ungefähr ein Jahr vor der Einschulung, im Juli 2010, nach Beendigung des Trainings zur Untersuchung der unmittelbaren Trainingseffekte und im März 2011, nach Ablauf des ersten Schulhalbjahres, zur Untersuchung der langfristigen Effekte.

4.3.2.1.2 Stichprobe

An der Studie nahmen insgesamt 14 Kindergärten unterschiedlicher Trägerschaft aus sozial und regional unterschiedlichen Einzugsgebieten der Stadt Essen mit 248 Vorschulkindern teil. Alle Kindergärten wurden über den Ablauf der Studie informiert. Insgesamt 6 Kindergärten mit 118 Kindern waren bereit, die Testerhebungen in ihren Einrichtungen durchführen zu lassen, waren jedoch nicht an der Fördermaßnahme interessiert. Weitere 8 Einrichtungen nahmen mit 134 Kindern die praktische Durchführung des Trainings vor.

Für die Auswertung wurde es erforderlich, die Experimental- und Kontrollgruppe um einzelne Kindergruppen zu reduzieren. Zwei Einrichtungen (N = 40) mussten aus der Experimentalgruppe ausgeschlossen werden, da die Erzieherinnen dieser Einrichtungen nicht oder nur vereinzelt an den Fortbildungen teilnahmen. Persönliche Gespräche stellten zusätzlich heraus, dass in diesen Kindergärten eine Umsetzung des Förderprogramms aus verschiedenen Gründen nicht gelang. Die Experimentalgruppe reduzierte sich damit auf N = 94 Kinder. Des Weiteren ergaben Befragungen der Kontrollgruppe, dass zwei Institutionen (N = 34) unabhängig von der Studie eine eigene mathematische Förderung durchführten. Somit mussten auch hier zwei Kindergruppen für die nachfolgende Analyse ausgeschlossen werden, und die Kontrollgruppe reduzierte sich auf N = 78 Kinder. Die ermittelten Ergebnisse beziehen sich somit auf die reduzierte Experimental- bzw. Kontrollgruppe. Zum Follow-up waren 15 Kinder unbekannt verzogen, 7 Kinder waren vom Schuleintritt zurückgestellt worden und 13 Kinder konnten nach dem Wechsel an die Grundschulen nicht mehr erreicht werden. Damit setzt sich die in die Auswertung eingehende Stichprobe wie folgt zusammen (vgl. Tab. 4.3.1).

Tabelle 4.3.1: Überblick über teilnehmende Kinder pro Testzeitpunkt

	Alter	Verteilung des Geschlechts zu t1	N Prä-Test	N Post-Test	N Follow-Up
Experimentalgruppe	5;5 (SD=0.39)	57.4 % Mädchen	94	86	75
Kontrollgruppe	5;5 (SD=0.30)	48.7 % Mädchen	78	69	62

4.3.2.1.3 Testinstrumente

Vorschulische mathematische Fähigkeit: Aufbauend auf dem Entwicklungsmodell wurde für den Prä- und Posttest das diagnostische Testverfahren MARKO-D (Ricken, Fritz & Balzer, 2013) eingesetzt. Über die Anzahl richtig gelöster Aufgaben erfolgt eine Zuordnung zu einem Niveau. Der Test weist eine Reliabilität von Cronbachs α = .91 auf (vgl. ebd.).

Schulische mathematische Fähigkeit: Für das Follow-up wurde der MARKO-D-1 (Fritz, Ehlert, Ricken & Balzer, in Vorb.) genutzt. Dieser Einzeltest für die 1. Klasse basiert ebenfalls auf dem Entwicklungsmodell. Die Items des MARKO-D und des MARKO-D 1 überschneiden sich, wobei der Erstklassentest mehr Items auf den höheren und weniger Items auf den unteren Niveaustufen enthält. Die Reliabilität, anhand der vorgestellten Stichprobe ermittelt, beträgt Cronbachs α = .91.

Kognitive Fähigkeit: Zu allen drei Erhebungszeitpunkten wurden zudem die kognitiven nonverbalen Fähigkeiten mit dem CFT-1-Grundintelligenztest (Untertests Klassifikation, Ähnlichkeiten, Matrizen) erhoben.

4.3.2.1.4 Ergebnisse

Um die Ausgangsleistungen im Prätest zu analysieren, wurden für die mathematischen Leistungen (MARKO-D) die standardisierten Testwerte der T-Skala und für die kognitiven Leistungen (CFT) die Testwerte der IQ-Skala genutzt. Der t-Test bestätigt, dass die Experimentalgruppe (EG) und die Kontrollgruppe (KG) mit vergleichbaren Leistungen in die Studie starteten, $t_{T\text{-}MARKO\text{-}D}(170) = 1.027$, $p = .306$ ($M_{EG\text{-}MARKO\text{-}D} = 50.56$, $SD = 10.12$; $M_{KG\text{-}MARKO\text{-}D} = 49.01$, $SD = 9.54$), $t_{IQ\text{-}CFT}(169) = -.188$, $p = .851$ ($M_{EG\text{-}CFT} = 104.42$, $SD = 13.11$; $M_{KG\text{-}CFT} = 104.84$, $SD = 15.52$). Die mathematischen Leistungen wurden zu den drei Messzeitpunkten mit insgesamt zwei verschiedenen Testverfahren erhoben (MARKO-D und MARKO-D1). Um die Leistungsentwicklung der Experimental- und Kontrollgruppe vergleichen zu können, wurden die mathematischen Leistungen auf einer eindimensionalen Raschskala abgebildet. Da sich beide Testverfahren mit einer großen Itemanzahl überschneiden, dienen diese Überschneidungsitems als Ankeritems, ähnlich wie bei Studien mit Multi-Matrix-Design. Für die folgenden Leistungsvergleiche mittels einer Varianzanalyse wird der WLE-Wert zur Schätzung der Kompetenz auf Individualebene genutzt (vgl. Abb. 4.3.1).

A) kurzfristige Effekte (t1-t2): Eine Messwiederholungs-Varianzanalyse mit dem within-subjects-Faktor „Messzeitpunkt“ und dem between-subjects-Faktor „Gruppenzuordnung“ ergab sowohl einen Haupteffekt für den „Messzeitpunkt“: $F(1, 152) = 146.588$ $p < .001$, partielles $\eta^2 = .491$, als auch einen Haupteffekt für die „Gruppenzuordnung“: $F(1, 152) = 14.867$, $p < .01$, partielles $\eta^2 = .089$. Dies bedeutet, dass sich die WLE-Werte, als Schätzer der mathematischen Kompetenz auf Individualebene, in beiden Kindergruppen zwischen t1 ($M_{EG} = -\ 0.4410$, $SD = 1.15$, $M_{KG} = -0.573$, $SD = 1.01$) und t2 ($M_{EG} = 0.605$, $SD = 1.28$, $M_{KG} = -\ 0.033$, $SD = 0.94$) erhöht haben, was belegt, dass die mathematische Kompetenz einen Leistungszuwachs erfahren hat ($d_{EG} = 0.86$, $N = 86$; $d_{KG} = 0.55$, $N = 68$). Der Leistungszuwachs der Experimentalgruppe fällt mit einer Differenz von $d = 0.31$ allerdings signifikant stärker aus als für die Kontrollgruppe.

B) langfristige Effekte 8 Monate nach Trainingsende (t1-t3): Die Analyse der Leistungen im Follow-Up ergab sowohl für den Messwiederholungsfaktor „Messzeitpunkt“: $F(1, 128) = 758.086$, $p < .001$, partielles $\eta^2 = .854$, als auch für den Faktor „Gruppe“ einen Haupteffekt: $F(1, 128) = 8.775$, $p < .01$, partielles $\eta^2 = .063$. Dieses Ergebnis spiegelt wider, dass sich für beide Gruppen die Schätzer der mathematischen Konzepte auf Individualebene zwischen t1 ($M_{EG} = -0.37$, $SD = 1.14$, $M_{KG} = -0.59$, $SD = 1.09$) und t3 ($M_{EG} = 2.13$, SD = 1.41, M_{KG} = 1.43, SD = 1.29) erhöht haben, wobei der zugrundeliegende Leistungszuwachs für die Experimentalgruppe signifikant stärker ausfällt als für die Kontrollgruppe (d_{EG} = 1.95, N = 70; d_{KG} = 1.68, N = 62). Der Unterschied im Leistungszuwachs kann mit einer Differenz von d = 0.27 beschrieben werden.

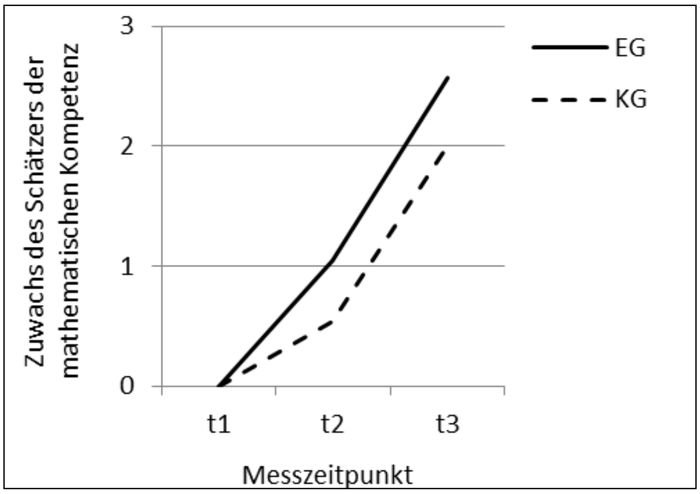


Abbildung 4.3.1: Kurz- und langfristiger Zuwachs des Schätzers der mathematischen Konzepte

4.3.2.1.5 Interpretation

Die Ergebnisse belegen für alle geförderten Kinder unmittelbar nach der sechsmonatigen Förderung signifikant stärkere Leistungszuwächse. Kinder, deren Erzieherinnen das Fördermaterial *Mina und der Maulwurf* einsetzten, profitierten von einem deutlichen Fördereffekt direkt nach dem Trainingsende und erhielten dadurch zu ihrem Schulbeginn hinsichtlich ihrer mathematischen Lernentwicklung verbesserte Startchancen. Da die Kinder mit den Trainingsinhalten bis mindestens Baustein 3 gefördert wurden, verfügten sie über günstigere Voraussetzungen in Bezug auf das für diesen Zeitpunkt des Übergangs in die Grundschule wesentliche Entwicklungsniveau III mit den zentralen Konzepten der Kardinalität und Zerlegbarkeit.

Auch die langfristigen Effekte fielen 8 Monate nach Beendigung des Förderprogramms für die Experimentalgruppe stärker aus als für die Kontrollgruppe. Selbst nachdem die Kinder bereits ein halbes Jahr die Schule besucht und beinahe täglich Mathematikunterricht erhalten hatten, war der Leistungsvorsprung der Trainingskinder noch immer nachweisbar. Dies obwohl es oftmals besonders schwierig erscheint, „eine große Kompetenzsteigerung der

Kinder zu erreichen, wenn schon der Zuwachs in der natürlichen Entwicklung recht zügig erfolgt“ (Krajewski, Nieding & Schneider, 2008a, S. 144).

Die nachhaltige Wirksamkeit der Förderung aller Kinder schließt diejenigen mit unterdurchschnittlichen Leistungen ein und bestätigt die Möglichkeit des Ergreifens präventiver Maßnahmen und des Erfüllens der „Erwartung kompensatorischer Effekte“ (Hasselhorn, 2010, S. 175) für schwächere Kinder. Die häufig in anderen Studien benannten „washing-out“-Effekte waren hier nicht zu verzeichnen.

4.3.2.2 Studie II[11]

Von der ersten Studie unterscheiden sich in Studie II das Alter der Kinder, die eingesetzten Fortbildungsvarianten sowie das Messinstrument zur Erfassung der Effekte. Studie II widmete sich der Frage, ob sich die Effekte unterscheiden, wenn einerseits die Fortbildung der Erzieherinnen mit der Vorgabe und Anleitung eines strukturierten Trainings verbunden wird und andererseits Erzieherinnen aufbauend auf der theoretischen Auseinandersetzung mit dem Entwicklungsmodell alltagsintegriert arbeiten.

4.3.2.2.1 Untersuchungsdesign und Durchführung

Die empirische Untersuchung erfolgte nach einem quasiexperimentellen Design mit zwei Treatmentgruppen und einer Kontrollgruppe. Erzieherinnen beider Treatmentgruppen nahmen an einer Fortbildung teil, die sich mit fünf Einheiten über den Zeitraum eines halben Jahres erstreckte. Die Erzieherinnen der Treatmentgruppe 1 wurden in der Umsetzung des Fördertrainings *Mina und der Maulwurf* geschult. Das Fördertraining wurde von den Erzieherinnen in ihren Kindertageseinrichtungen zu wöchentlich festen Terminen in Kleingruppen umgesetzt, wobei der Fokus auf Baustein 0, 1 und 2 lag. Baustein 3 konnte im Interventionszeitraum nur noch vereinzelt durchgeführt werden. Die Teilnehmerinnen der Treatmentgruppe 2 sollten für den mathematischen Gehalt in Alltagssituationen sensibilisiert werden und erarbeiteten sich auf der Grundlage des Entwicklungsmodells selbstständig Förder-, Spiel- und Gestaltungsmöglichkeiten zu den zentralen mathematischen Konzepten der einzelnen Niveaus. Diese nutzten sie für eine alltagsintegrierte Förderung, die sie mit bewusst inszenierten mathematischen Spielen ergänzen sollten. Hier lag der Fokus auf den

[11] In dieser Arbeit wird diese Studie (Dissertationsprojekt von C. Hildenbrand) mit Studie V bezeichnet. Von Claudia Hildenbrand wurde das Unterkapitel 4.3.2.2 verfasst. Die Interpretation (4.3.2.2.6) wurde gemeinsam geschrieben.

Niveaus 0 bis III. Die Erzieherinnen der Kontrollgruppe erhielten im Rahmen der Untersuchung keine Fortbildung.

Die mathematischen Konzepte der Kinder wurden in einem Prä-/Post-/Follow-up-Design erhoben, wobei die Testungen als Einzeltestungen von geschulten externen Testleiter/inne/n durchgeführt wurden. Die Prä-Tests fanden im Dezember 2010 statt, die Intervention von Januar bis Juni 2011, die Post-Tests wurden im Juni 2011 durchgeführt und die Follow-up-Erhebung ein Jahr später im Juni 2012.

4.3.2.2.2 Stichprobe

An der Studie nahmen pro Treatment- und Kontrollgruppe 10 Hamburger Kindertagesstätten teil. Bei der Auswahl der Einrichtungen wurde darauf geachtet, dass sich Merkmale wie die soziale Lage, die Trägerschaft oder das pädagogische Konzept in den einzelnen Stichprobengruppen nicht überzufällig häufen. Um durch Selbstselektion resultierende Gruppenunterschiede zu vermindern, wurden die Einrichtungen, bevor sie angesprochen und über inhaltliche und organisatorische Aspekte informiert wurden, von der Untersuchungsleiterin zufällig auf die Treatmentgruppen verteilt. Aus den Einrichtungen der beiden Experimentalgruppen nahmen jeweils ein bis zwei Erzieherinnen an den Fortbildungen teil ($N = 26$).

Bei der Kinderstichprobe handelt es sich um eine Klumpenstichprobe, die sich aus allen, von den teilnehmenden Erzieherinnen in einer Gruppe betreuten, ca. eineinhalb Jahre vor der Einschulung stehenden Kindern zusammensetzt (min. = 6; max. = 13), deren Eltern einer Teilnahme am Projekt zugestimmt hatten. Zum Prätest wurden 286 Kinder getestet, 141 Jungen (49.3 %) und 145 Mädchen (50.7 %). Die Kinder waren durchschnittlich 57 Monate alt (48 bis 65 Monate; $SD = 3.9$ Monate). Zum Posttest konnten 260 Kinder getestet werden, 133 Jungen (51.2 %) und 127 Mädchen (48.8 %), die im Durchschnitt 64 Monate alt waren (55 bis 71 Monate; $SD = 3.8$ Monate).

4.3.2.2.3 Testinstrumente

Zur Erfassung der mathematischen Konzepte wurde eine Kurzversion des MARKO-D entwickelt. Diese bietet die Möglichkeit, parallel zu dem in Hamburg etablierten Vorstellungsverfahren eingesetzt zu werden. Dabei werden Kinder im Alter von etwa 4,5 Jahren an die Grundschulen eingeladen und es werden für jedes Kind wichtige Aspekte des Entwicklungsstandes dokumentiert, um bei Bedarf noch vor Schulbeginn gezielt fördern zu können. Die Kurzversion enthielt zum ersten Erhebungszeitpunkt 17 Aufgaben, welche jeweils zentrale Aufgaben der fünf Niveaus im MARKO-D darstellen und deren Bearbeitung ca. 15 Minuten dauerte. Zum zweiten Erhebungszeitpunkt wurde der Test um zwei Aufgaben ergänzt. Die Analyse der Kurzversion 1 ergab für drei Items im oberen Schwierigkeitsbereich eine Platzierung, die von der Skalierung der Normierungsdaten abweicht. Diese drei Items wurden aus der Analyse ausgeschlossen. Die verbleibenden 14 Items verteilen sich bei einer eindimensionalen Rasch-Skalierung auf der intervallskalierten Fähigkeits-/Schwierigkeits-skala analog zur Langversion und erreichen eine Reliabilität von .77. Bei einem analogen Vorgehen für Kurzversion 2 wurde ein Item ausgeschlossen und eine Reliabilität von .78 erzielt. Die Niveauzuordnung aufgrund der Kurzversionen korreliert manifest ($r = 0.87$ bzw. $r = .895$) mit der Niveauzuordnung auf Grundlage der Langversion.

4.3.2.2.4 Auswertung

Die Testleistungen der Kinder wurden nach dem eindimensionalen dichotomen Rasch-Modell skaliert. Für die Skalierung wurden die Schwierigkeitsparameter der 14 bzw. 18 in der Kurzversion eingesetzten Testaufgaben aus den Normierungsdaten der Originalversion des Tests MARKO-D importiert und für die anschließende Skalierung fixiert. Es wurde also eine Fixed-Parameter-Kalibrierung durchgeführt, die bei unterstellter Messinvarianz des Modells die Stichprobe der vorliegenden Studie auf der Metrik des Referenztests MARKO-D positioniert (Moosburger, 2012; Pang, Madera, Redwan & Zhang, 2010). Für die weiteren Analysen wurden wie in der Studie I die WLE-Schätzer als Parameter für die individuell zugrundeliegenden mathematischen Konzepte genutzt. In der Analyse wurden Kinder aus zwei Einrichtungen nicht miteinbezogen. Eine Einrichtung ($N = 9$) der Treatmentgruppe 2 wurde nicht berücksichtigt, da die betreffende Erzieherin an nur einer Fortbildungsveranstaltung teilnahm. Aus der Kontrollgruppe wurde ebenfalls eine Einrichtung ausgeschlossen ($N = 9$), deren Leitung angab, dass die mathematische Förderung einen sehr starken Schwerpunkt ihrer pädagogischen Arbeit darstelle. Vollständige Datensätze liegen von insgesamt 220 Kindern vor.

4.3.2.2.5 Ergebnisse

Eine einfaktorielle Varianzanalyse der WLE-Schätzer zeigt, dass sich die Mittelwerte der mathematischen Konzepte pro Stichprobengruppe vor der Intervention signifikant unterscheiden ($F(2, 217) = 4.03$, $p < .05$). Aufgrund dieses Unterschieds wurden die drei Treatmentgruppen parallelisiert, indem aus jeder Gruppe zufällig je eine Teilstichprobe gezogen wurde und die Stichprobengruppen so hinsichtlich ihrer prozentualen Verteilung auf die

Niveaus, der Anzahl der Fälle, der Mittelwerte sowie der Standardabweichung angeglichen wurden. Die Ergebnisse für die Niveaus I bis III sind in Tabelle 4.3.2 dargestellt.

Tabelle 4.3.2: Verteilung über Niveaus, Häufigkeiten (N), WLE-Mittelwerte (M) und Standardabweichungen (SD) der parallelisierten Treatmentgruppen zum 1. Messzeitpunkt

		N	**M**	**SD**
Niveau I	Trainingsprogramm	15	-2.21	0.78
	alltagsintegr. Förderung	15	-2.22	0.86
	Kontrollgruppe	15	-2.21	0.78
Niveau II	Trainingsprogramm	26	-0.50	0.41
	alltagsintegr. Förderung	26	-0.48	0.41
	Kontrollgruppe	26	-0.50	0.41
Niveau III	Trainingsprogramm	9	0.58	0.21
	alltagsintegr. Förderung	9	0.61	0.20
	Kontrollgruppe	9	0.59	0.25

Mit diesen Stichprobengruppen wurde eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit dem Messwiederholungsfaktor „Messzeitpunkt“ sowie dem Faktor „Treatmentgruppe“ durchgeführt. Es zeigt sich ein Haupteffekt auf dem Faktor des Messzeitpunkts ($F(1, 147) = 48{,}198$, $p < .001$, partielles $\eta^2 = .247$) jedoch kein Effekt für die Treatmentgruppen ($F(2, 147) = 0.581$, $p = .561$ partielles $\eta^2 = .008$). Die Kinder erzielten zum zweiten Messzeitpunkt signifikant höhere Werte als zum ersten Zeitpunkt, wobei sich die Werte der drei Gruppen nicht signifikant unterschieden (vgl. Tab. 4.3.3). Ein Vergleich der Effektgrößen weist jedoch auf eine deutliche Verbesserung der Kinder mit dem Trainingsprogramm im Gegensatz zu den Kindern der anderen Gruppen hin.

Tabelle 4.3.3: Häufigkeiten pro Treatmentgruppe (N), Mittelwerte (M) und Standardabweichung (SD) pro Erhebungszeitpunkt, Effektgröße (d) der Veränderung von t1 zu t2

	N	**M t1**	**SD t1**	**M t2**	**SD t2**	**Cohen's d t1-t2**
Trainings-programm	50	-0.82	1.13	0.03	1.18	0.74
alltagsintegr. Förderung	50	-0.81	1.16	-0.13	1.52	0.51
Kontroll-gruppe	50	-0.82	1.13	-0.45	1.37	0.30

In einem nächsten Schritt wurden die Veränderungen über den Interventionszeitraum hinweg in Abhängigkeit von den Ausgangswerten betrachtet. Bei der nach den Ausgangsniveaus getrennten Varianzanalyse mit Messwiederholung zeigte sich bei Kindern mit dem Ausgangsniveau I neben dem Haupteffekt auf dem Messzeitpunkt ($F(1, 42) = 32{,}993$, $p < .001$, partielles $\eta^2 = .440$) ein Wechselwirkungseffekt zwischen dem Messzeitpunkt und der Treatmentgruppe ($F(2, 42) = 4{,}173$, $p < .05$, partielles $\eta^2 = .166$). Ein Effekt des Faktors Treatmentgruppe konnte nicht festgestellt werden ($F(2, 42) = 1.951$, $p = .155$, partielles $\eta^2 = .085$). Kinder mit dem Ausgangsniveau I, die mit dem Trainingsprogramm *Mina und der Maulwurf* gefördert wurden, erzielten zum zweiten Erhebungszeitpunkt höhere Werte ($N = 15$, $M_{t1} = -2.21$, $SD_{t1} = 0.78$, $M_{t2} = -0.29$, $SD_{t2} = 1.21$, $d = 1.91$) als Kinder mit dem gleichen Ausgangsniveau, die alltagsintegriert gefördert wurden ($N = 15$, $M_{t1} = -2.22$, $SD_{t1} = 0.86$, $M_{t2} = -1.38$, $SD_{t2} = 1.83$, $d = 0.60$) oder Kinder in der Kontrollgruppe ($M_{t1} = -2.21$, $SD_{t1} = 0.78$, $M_{t2} = -1.59$, $SD_{t2} = 1.22$, $d = 0.62$) (vgl. Abb. 4.3.2). Die Unterschiede betragen zwischen der Treatmentgruppe 1 und der Kontrollgruppe $\Delta d = 1.29$, zwischen der Treatmentgruppe 2 und der Kontrollgruppe $\Delta d = -0.02$ und zwischen der Treatmentgruppe 1 und Treatmentgruppe 2 $\Delta d = 1.31$. Für die anderen Ausgangsniveaus ließ sich ein solcher Effekt nicht feststellen.

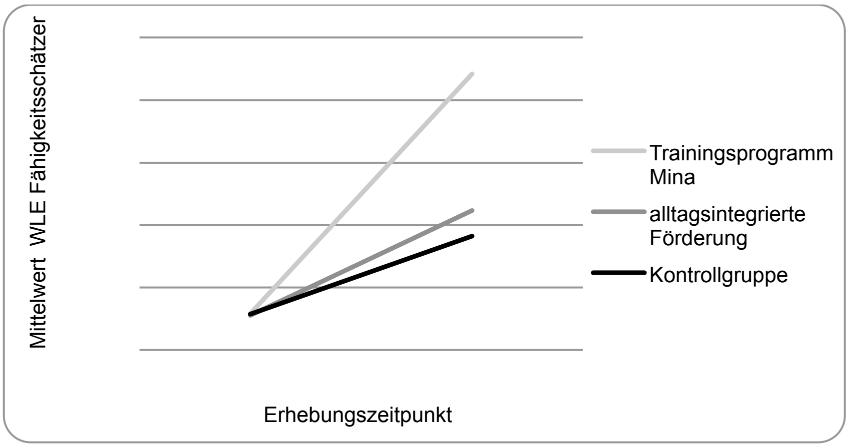


Abbildung 4.3.2: Zuwachs der mathematischen Fähigkeiten von Kindern mit Ausgangsniveau I

4.3.2.2.6 Interpretation

Die Studie zeigt, dass mit dem Programm *Mina und der Maulwurf* auch jüngere Kinder erfolgreich gefördert werden können, da die Kinder mit dem Ausgangsniveau I, deren Erzieherinnen strukturiert mit dem Programm gearbeitet hatten, einen bedeutsamen Fördereffekt verzeichneten.

Die Förderung mit dem Programm *Mina und der Maulwurf* fokussierte auf die Umsetzung der Bausteine 0, 1 und 2, da diese nach den dargestellten Befunden den Entwicklungsniveaus von 4- bis 5-jährigen Kindern entsprechen. Diese jüngeren Kinder der Stichprobe verbesserten sich entsprechend signifikant und profitierten von der Förderung. Das bedeutet, diejenigen Kinder, auf die die Trainingsinhalte abzielten, konnten sich durch die Intervention erwartungsgemäß deutlich erfolgreicher weiterentwickeln. Da sich die Förderung im weiteren Verlauf zeitlich nur eingeschränkt auf die Inhalte der höheren Bausteine 2 und 3 bezog, haben die Kinder, die sich bereits auf einem höheren Ausgangsniveau als I befanden, ihre mathematischen Fähigkeiten nicht verbessern können - sie hätten möglicherweise die ausführliche Behandlung der Bausteine 0 und 1 nicht mehr in dem Umfang benötigt. So bleibt offen, welche Wirkung ggf. eine stärker adaptive Förderung gezeigt hätte.

Ein Schwerpunkt lag auf der Erprobung und dem Vergleich von Fortbildungsvarianten. Der Befund, dass sich die Kinder der alltagsintegrierten Förderung im Vergleich zur Kontrollgruppe nicht signifikant verbesserten, kann als Hinweis darauf gedeutet werden, dass eine 5-malige Fortbildung mit der Vermittlung von fachlichem und fachdidaktischem Wissen nicht ausreicht, um Erzieherinnen zu befähigen, die mathematische Entwicklung alltagsintegriert anzuregen und zu fördern. Es benötigt Zeit und Erfahrung, um das Entwicklungsmodell zu verinnerlichen und angemessene Förderangebote zu verwirklichen. Ein alltagsintegrierter Ansatz erfordert ein hohes Engagement der Erzieherinnen und viel Intensität in der Auseinandersetzung mit den theoretischen Grundlagen. In diesem Sinne gibt auch Werner (2009) zu bedenken, dass ein alltagsbezogenes Vorgehen besonders hohe didaktische Anforderungen und professionelle Beobachtungskompetenzen an Erzieherinnen stellt, wenn es darum geht, mathematische Lernchancen zu entdecken und Lernumgebungen passend aufzubereiten. Eine punktuelle Fortbildung von Erzieherinnen stellte sich hier als nicht ausreichend für eine erfolgreiche alltagsintegrierte Förderung dar. Es erscheint effektiver, Erzieherinnen sowohl fundiertes Theoriewissen als auch eine strukturierte Vorgehensweise, zum Beispiel in Form eines Programms, zu vermitteln.

4.3.2.3 Ausblick

Generell ist für die Umsetzung eines jeden Förderansatzes der Erwerb von Professionswissen unerlässlich und es bedarf unbedingt seiner Konsolidierung. Soll mathematische Bildung zielführend und nachhaltig wirksam im Kindergarten realisiert werden, muss vor diesem Hintergrund eine adäquate fachliche Qualifizierung in der frühpädagogischen Aus- und Weiterbildung sehr ernst genommen werden und künftig einen bedeutend verbindlicheren Schwerpunkt finden.

Mit dem Förderprogramm *Mina und der Maulwurf*, das auf einem abgesicherten theoretischen Konzept basiert, wurde eine effektive Möglichkeit für die vorschulische Bildung vorgestellt. Da *Mina und der Maulwurf* umfassende Anregungen für Kinder bis zu einem Alter von 8 Jahren bietet, ist das Programm nicht nur für frühe Bildungsprozesse im Kindergarten, sondern ebenfalls für die individuelle Förderung schwacher Rechner im ersten und zweiten Schuljahr in Grundschulen geeignet. In seiner Kontinuität und Kohärenz ist das Fördertraining damit für die Gestaltung einer erfolgreichen Transition im Sinne anschlussfähiger Bildungsprozesse von Interesse. Im Rahmen der bildungspolitisch zunehmend geforderten engeren Verzahnung von Elementar- und Primarbereich können mit dem Fördermaterial als gemeinsame tragfähige Arbeitsgrundlage Lernprozesse im Kindergarten begonnen und in der kooperierenden Grundschule aufbauend fortgesetzt werden, so dass Kinder über eine lange Zeit optimal begleitet werden. Auch ergeben sich im Rahmen der Inklusion Möglichkeiten, Lernprozesse von Kindern mit besonderem Förderbedarf effektiv zu unterstützen.

4.4 Studie VI:

Realising pre-school mathematical education – a development-oriented math programme with special consideration of phonological language processing aspects[12]

Abstract

Mathematical development processes begin long before school starts and the importance of previous mathematical knowledge for later school achievements is beyond dispute. For a suitable pre-school education, the focus of interest must be to find out which early learning processes prepare children best. In this article, the acquisition of the key concepts of numeracy is presented in a developmental model, which served as framework for a supportive program for 4-8 year-old children. The research into this intervention shows how development-oriented support of key arithmetic concepts can be constructed and taught systematically. The immediate and sustainable effect of the programme *Mina and the Mole* on the mathematical competencies of children has already been demonstrated in an evaluation study of 248 children aged 5-7. Considering the strong language-orientation of the programme, the present study focused on aspects of phonological awareness and of phonological working memory. It was evident that these phonological language processing aspects correlated with mathematic skills. Furthermore, it was found that the dominant linguistic focus of the training did not constitute a disadvantage – even linguistically weak children significantly improved their mathematical skills. Moreover, children with poor or average phonological performance could profit from the supportive programme also regarding their phonological language processing.

[12] Dieses Kapitel 4.4 entspricht einem Artikel, der in der Zeitschrift *South African Journal of Childhood Education* veröffentlicht wurde:
Langhorst, P., Ehlert, A. & Fritz, A. (2013). Realising pre-school mathematical education – a development-oriented math programme with special consideration of phonological language processing aspects. *South African Journal of Childhood Education 3*(1), 68-99.

4.4.1 Introduction

4.4.1.1 The role of prior knowledge

Ever since the discussion of the PISA studies on school performance (a.o. Baumert et al., 2001), educational activities in the *pre-school area* have come more and more the focus of attention. Not only has a connection been proven between achievements at the beginning of school and later achievements, but also between the *duration* of the kindergarten time and achievements in secondary school (Ehmke, Siegle & Hohensee, 2005). Those students who demonstrated higher-level competencies in mathematics in PISA 2003 had attended pre-school institutions for a longer period of time. The importance of the education in kindergarten for the early development of mathematical competence is emphasised (Prenzel et al., 2004).

Research has also shown the predicative importance of previous mathematical knowledge for later success in learning mathematics. Grube & Hasselhorn (2006) found that the extent of the previous knowledge is the key determining factor for mathematic understanding, and that intelligence does not explain any specific part of an increase in performance that cannot already be explained by previous knowledge. In longitudinal studies, Krajewski & Schneider (2006) found a distinct correlation between specific quantity- and number-related prior knowledge and mathematical achievements during and at the end of the primary school period. Low quantity-number competencies allowed the reliable prediction of future difficulties in learning mathematics at school already half a year before the onset of formal education. Aunola et al. (2004), in a Finnish longitudinal study, found that children who had low quantity-number understanding before starting school developed significantly slower in school. These findings illustrate the necessity of preventing, and compensating for, delays in development.

Since the aim of maths education in the pre-school years is to enable all children acquire a sound and school-oriented mathematical knowledge, it is necessary to understand the process of acquiring numeracy. We argue that the approach of effective early mathematical education means focusing on the development of mathematical competencies, specifically of number concept.

4.4.1.2 Development of mathematical concepts

Based on two innate core systems, the abilities to approximately represent and distinguish quantities develop early on (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004): Firstly, the analog-magnitude-representation-system allows global comparisons in which larger quantities are not represented as discrete units. The second core system, the object-file-representation-system, facilitates the precise quantitative representation of successively given distinct small quantities of up to three elements. These two core systems for recognising and comparing quantities are active before the onset of language use.

These early numerical systems of cognition are followed later on by the acquisition of the number word line, as well as protoquantitative notions that are void of numerically precise number relations. Resnick (1992) describes three protoquantitative schemes. She explains that by means of the "scheme of comparing", children begin to assess two quantities as "more" or "less" already at the age of two. The "increase/decrease-scheme" of adding and subtracting allows them to understand and express non-numerical quantity set operations as a process at the age of about 3 to 4 years. The vital protoquantitative "part-whole-scheme" is developed at the age of about four. This concerns the basic understanding of relations between a whole and its parts without precise quantification (cf. *ibid*). A study on the development of the part-whole concept (Langhorst, Ehlert & Fritz, 2012) showed that about two thirds of the 4-year-olds and almost 80 % of the 5-year-old pre-school children could manage non-numerical part-whole context tasks without visual materials.

While non-numerical quantity knowledge and counting skills at first develop independently, the acquisition of counting principles brings about the integration of both areas. Through their connection with the understanding of ordinal relations and the linking of the number knowledge with the "increase/decrease-scheme" precise quantity and number operations become possible gradually (a.o. Resnick, 1983; Fuson, 1988). For the system of symbolic number representation key concepts, such as cardinality and the part-whole concept need to evolve in due course. These key concepts do not develop by themselves: they require instruction (Dehaene, 1997). They represent the milestones of knowledge acquisition when acquiring numeracy (Krajewski & Schneider, 2006; Fritz & Ricken, 2008). In the following, the developmental model of Fritz & Ricken (2008) describes which individual components form the basis of these concepts.

Developmental model for the acquisition of numeracy

The developmental model of Fritz & Ricken (2008) consists of 5 distinguishable levels of ability and is used to assess for 4 to 8-year-olds (see in detail article of Fritz, Ehlert & Balzer in this journal). It is based on theoretical suppositions and empirical findings (a.o. Piaget & Szeminska, 1965; Resnick, 1983; Fuson, 1988; Wynn, 1990; Case & Okamoto, 1996). The operationalisations of the five levels were developed in several studies and tested in various item versions with approximately 3000 children. In each instance the construction of the model could be replicated.

Level I *Count number:* The acquisition of the number word line begins at the age of two to three. At first, children recite the number words without linking each number word to a specific meaning. Gradually, they construct the meaning of numbers as tools for counting. Upon understanding the one–to–one–correspondence the number words are successively linked to quantities of objects (Fuson, 1988). It takes about one year to achieve the confident counting out of four objects, then the counting process is seen as achieved (Wynn, 1990).

Level II *Mental number line:* Based on representations of a mental number line (Resnick, 1983) children develop the ordinal concept that the number word line has a fixed order which indicates getting “larger“. 4-5 year-old children are able to compare quantities according to their position on the number word line. Children can identify precursory and successive numbers and add and subtract numerically precisely by moving forward and backward on the counting line (Case & Okamoto, 1996). All quantities are counted out individually, always beginning at 1.

Level III *Cardinality and Decomposability:* The number word line is understood as a sequence of increasing cardinality. Numbers are composite units that represent the specific cardinality of a quantity with the number of its elements (Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988). In additive operations, quantities do not have to be counted out individually any longer as cardinal knowledge is now connected to a first understanding of the composition of quantities and of their decomposition into individual units. The first summand can now be seen as partial quantity of the total quantity.

Level IV *Class inclusion and Embeddedness:* Children grasp the inclusion principle that each number contains the quantity of the precursory numbers (Piaget & Szeminska, 1965). By the part-whole concept the child can understand that a number is composed of all elements of its quantity and can be decomposed in different ways (Resnick, 1983; Fuson, 1992). Far more efficient strategies are elaborated and can be applied to word problems that enquire after the exchange quantity, as well as the final, or initial quantity.

Level V *Relationality:* With the relational number concept (Stern, 1998) children develop the understanding that the distance between two consecutive numbers is the same: numbers in the number word line increase steadily by 1. Distances between the numbers are congruent and thus can be precisely defined. Tasks such as “which number is 3 bigger than 4?“ become solvable. More complex word problems in which the relations between numbers have to be modelled with only the relational quantity given can now also be solved.

4.4.1.3 Realising suitable mathematical education for a pre-school age

Having described the construction of key arithmetic concepts for numerically precise calculations the question arises how early mathematical education can be realised in a technically- and developmentally adequate, and educationally child-oriented way (Fthenakis et al., 2009). For this, we have generated criteria for pre-school mathematics education.

Development-oriented and systematic conceptualisation

We propose that early mathematics education should not be seen as a short-term intervention but rather as developmentally oriented and systematically constructed. The aim should be to let children acquire the key concepts gradually.

Such support is found in countries where pre-school education is run on a curriculum. In the US this has been the case for a number of years. Griffin (2008) could, for example, show that in the programme *Number Worlds*, which contains module-like curricula for children from 4 years up to grade 8, children who were supported with it on a daily basis had a more developed number knowledge when they started school. Similarly, Clements & Sarama (2007) stated advances in performance of the 4-5-year-olds immediately after they had been supported daily for half a year with the course-like programme *Building Blocks*. *Big Math for Little Kids* (Ginsburg, Balfanz & Greenes, 2003) is another structured programme that is carried out on a daily basis for years. The immense effectivity of early systematic support can also be seen in Australia. A comparative survey of the mathematical skills of German and Australian children, at the beginning and after completing their last year of kindergarten, showed superior achievements of the Australian children who are exposed to an obligatory pre-school year that consists of daily exposure to mathematical preparation (Clarke, Clarke, Grüßing & Peter-Koop, 2008).

Early mathematical education should be based on theoretically well-grounded and verifiable concepts (Royar, 2007) that represent the development of competencies. In Germany, the theory-based supportive concepts “Mengen, zählen, Zahlen“ (“MZZ“, Krajewski, Nieding & Schneider, 2008a, “Sets, Counting and Number“) and the “Förderprogramm zur Entwicklung des Zahlkonzepts“ (“FEZ“, Peucker & Weißhaupt, 2005, “Development programme for number concpet“) have proved to be effective. They were devised for the last year of kindergarten in order to systematically build specific preparatory skills. Both programmes follow a developmental structure, but their support units are limited to a few weeks only.

Activities integrated in games and daily routines

Considering that children interact with their environment through playing and learning processes, the realisation of mathematical education should be oriented towards the child's environment (Fthenakis et al., 2009). Fun activities embedded in everyday situations are seen as appropriate learning instances; they foster positive attitude towards mathematics (Hellmich, 2007). Such a playful approach is strongly advocated in the Netherlands where early mathematics is learned from the age of three in interaction with adults (van Oers, 2004). As for addressing mathematics-related topics in picture books and stories, van den Heuvel-Panhuizen (2012) has highlighted the added potential for learning mathematics in a study with 5-year-old Dutch children.

Research findings also show the effectiveness of such a playful support that does not follow fixed sequences and preset tasks. However, it should be noted that these programmes only seem to be effective when they focus on contents that aim at specific precursory skills. A study with Swiss kindergarten children showed that a programme that used games ("Spiel-integrierte Förderung", "SpiF", Hauser & Rechsteiner, 2011, "Advancing through play integration") brought about learning progress that was similar to the German programme "Mengen, zählen, Zahlen" ("MZZ").

Early intervention for weaker children

In addition to the mathematical education of *all* children, one has to consider the specific compensatory early intervention. Hasselhorn (2010) sees early intervention as a preventive measure to improve the competencies of potential at-risk children, or to prevent unfavourable individual developments. Intervention programmes that focus explicitly on early preventive intervention of potential at-risk children showed long-term effects. In the Netherlands, the programme "Additional Early Mathematics" (Van Luit & Van de Rijt, 1995), which supports basic mathematical skills and strategies for simple arithmetic problems, was devised for 4 to 7-year-old children with delayed development. In a study, the at-risk children who were supported showed better performance than the control group both in the short- and long-term and caught up with their classmates (Van de Rijt & Van Luit, 1998). A longitudinal study in Germany analysed the successful support of potential at-risk children through adaptation of individual support plans (Grüßing & Peter-Koop, 2008). The selected children displayed increased performance regarding their quantity- and number-related knowledge just before they started school.

The demand for *sustainability* in early mathematical intervention is of vital importance. If support measures really helped develop skills or knowledge, these should still be traceable after several months (Hasselhorn, 2010). *Metacognition*, *diagnostic integration* and *adaptivity* are seen as key criteria for the realisation of suitable support:
The support should be devised in a way that it focuses not only on the imparting of knowledge, but also enabling the metacognitive reflection of the learning process. Pre-school children already have the capacity to think about their own learning and share these thoughts with others (Hasselhorn & Gold, 2006). This necessitates the verbalisation of strategies and the reflection upon their applicability and effectivity (Gerlach, Fritz, Ricken & Schmidt, 2007). Furthermore, support is particularly effective when it is accompanied by diagnosis and the programme is adapted to the development and learning progress of the children (Walter, 2009). If a support programme lacks adaptability to the learning requirements it may fail to achieve any effect (Langhorst, Hildenbrand, Ehlert, Ricken & Fritz, 2013).

Fulfilling these requirements concerning suitable mathematical diagnostics and support imposes high demands on the professional knowledge of the kindergarten teacher and requires appropriate qualification (Hellmich, 2007). Teachers also need to have learning support materials that speak to the needs of the children.

4.4.1.4 *Mina and the Mole* – a mathematics development programme

Based on the developmental model of Fritz and Ricken described above, Gerlach & Fritz (2011) have conceptualized a development-oriented programme for children aged 4 to 8. The programme, *Mina and the Mole* is aligned to the five levels of the model. The support accompanies the development of the children and can be adapted to their specific learning needs and rates of learning.

Contents of the programme

The aim of the programme is to teach basic arithmetic concepts. The training consists of six consecutive modules that are constructed in a systematic way. Entry into the programme can begin with each module; this depends on the developmental requirements of a learner. Each module consists of several topics. So, it can be used with different aspects of the five concepts over a long time. The modules contain the following key concepts (Gerlach & Fritz, 2011):

Module 0 contains content for younger children or children with delayed development. It focuses on basic skills with elementary pre-numeric contents such as recognising and naming objects, and comparing and sorting them by their characteristics. Here, children make numerically imprecise comparisons of quantities, they estimate quantities and they also identify ascending sequences, for example, ordered by size.

Module 1 supports the acquisition of the key competence of correct one–to–one–matching of number word and counting object, as well as the development of a first concept of numerosity by matching number and quantity. Here, the number word line, the determination of quantities by counting-out, and the comparison of numbers through their position on the mental number line are supported.

Module 2 deepens the understanding of the concept of numerosity by connecting the number word line and the quantity. Quantities are compared in different ways: by perception, by counting, and by one–to–one correspondence. Quantities are adjusted and divided as well.

Module 3 works both on adding and subtracting as well as on achieving the concept of decomposability through counting operations on quantities. Operations are carried out based on the part-whole concept and numbers are decomposed in various ways. Furthermore, an understanding of *compensation* (the whole does not change when an element is shifted from one subset to another) and of *covariance* (if elements are added to or subtracted from a subset, the whole changes accordingly) is introduced based on perceptive material.

Module 4 extends "calculating" and relates specifically to subset operations. Tasks of embeddedness, on inversive relations between addition and subtraction, and of increasing flexibility of the part-whole understanding are all practiced in this module.

Module 5 deals with the comparison of quantities to determine differences and the relations between numbers. Although, generally, children only develop a firm grasp of the relational number concept in the second grade, rather complex comparison tasks are dealt with here, at a very elementary level, through appropriate choice of context and concrete actions.

Mathematics through stories

The programme is embedded in a cycle of stories. The kindergarten teacher introduces each new module of content by telling a story, which leads the children into an imaginary forest and meadow world. There they meet the protagonist of all stories, the little bee, "Mina," who has many adventures and meets a lot of other animals. While reading the story, the teacher also uses a bee hand puppet and shows the children a book with suitable illustrations that accompany the story. Each of the 27 stories poses a mathematical problem the children have to solve. The stories challenge the children to think independently. In module 3, for example, the children need to help two squirrel brothers work with quantities: "*Fred and Rick have gathered 6 acorns. They want to give 4 to their grandma – how many will they have left?"* (see Fig. 4.4.1). In another story, children assist a rabbit, "Paul," with solving a subset problem (principle of compensation): *Paul has got 6 carrots, 4 are in one box, 2 in another box. Mina puts one carrot from the one into the other box but Paul complains: "Now I have got fewer carrots, since you took one carrot out of my box – or?*" (see Fig. 4.4.2). In module 5, the children are confronted with particular challenges with tasks on relationality, or on the determination of differences. Here, moles need help with looking after their children: "*There are 7 mole children, one more girl than boys – how many girls are there?* or *Each boy eats 8 worms, each girl eats 5 – how many more are 8 than 5?".*

Figure 4.4.1: Illustration for the content "operating with quantities": *The squirrels have gathered 6 acorns. They want to give 4 to their grandma – how many will they have left?* (see: storybook of *Mina and the Mole*, p. 43)

By embedding mathematical problems in stories about real-life topics such as friendship, conflict and reconciliation, sharing fairly, celebrating birthdays or starting school, children are inspired think about these problems for fun and they realise that mathematics can be fun and useful. In general, children want to hear stories and love to pick the same story books with the familiar characters again and again. In the math programme one story is read out repeatedly and used in several support units to introduce the different parts of one content area.

Figure 4.4.2: Illustration for the content “subset change“: *The rabbit Paul is surprised to find that there are still a total of 6 carrots in his 2 boxes, even if he puts carrots from one box into the other.* (see: storybook of *Mina and the Mole*, p. 44)

Systematic imparting of contents

The various contents are always addressed in the same way. As described above, a story first introduces the respective problem and solutions are looked for. Set off by the adventures of the bee Mina, the children are then given concrete stimuli for the exploration of the mathematical problem, with a focus on verbalization and reflection within an instructional setting. For this purpose, the kindergarten teachers are provided with 48 instruction cards with concrete instructions for this deepening group exercise. On the cards the texts are predefined, the cards say exactly what the teacher should say to the children. The exercises with the children are described precisely. So the cards can be regarded as a firm guide for the work with the children. Supported by these instructions, the teacher can focus much better on a targeted approach. The suggestions for suitable strategies and for the reflection phases serve as content-oriented support for systematic imparting. The stimuli can also be modelled differently by the teachers or developed during the discussion with the children. In the same way children are given room for discovering solutions independently and in different ways (cf. article by Scherer in this journal). For learning in heterogeneous groups, the task cards also often contain various strategic levels of ability, i.e. simpler or more elaborate strategies, last ones for requiring a higher level of conceptual knowledge.

Example

The following shortened version of a story is used as starting point for the exploration of the topics “counting principles” and “quantity concept”:

> *Mina meets the caterpillar Mathilda. Mina boasts “I am already really good at counting!” So Mathilda asks her: “How many humps have I got?” Mina starts to count: “1, 2, 3, 4, 5, 6 and so on.” (She does not look at the humps, though). She has no idea how to find out through counting how many humps Mathilda has exactly. So, she answers vaguely: “You have about 5 or 100 humps?!” Then she flies away quickly so that the caterpillar cannot ask further. Now she needs the children’s help.*

Following the story, the children are encouraged to compare notes, discuss and bring in ideas: “how can the bee find out ‘how much’ something is?” First, the children’s individual counting experiences are referred to. The children realize that this is not about simply reciting the number word line anymore, but rather about identifying the number of elements of a quantity. The story book offers follow up prompts, such as: “*Can you count Mathilda‘s humps or Mina’s stripes or the leaves? How many are there*?” (see Fig. 4.4.3).

Figure 4.4.3: “*How many humps have I got?”* (see: storybook of *Mina and the Mole*, p. 37)

In the guided group exercise, many objects (leaves, conkers, stones) are counted-out in monitored counting processes. The children are supposed to learn about the concept of numerosity through one-to-one correlation: one number word for one counting object. Here, they can touch the objects, move them to one side or finally learn to count with their eyes only. For this phase, the teachers use the instruction card: *“I now put some leaves into the middle.*

Who can count the leaves?" (...) "Please touch each leaf when counting!" (...), "Please count out loud!" (...), "Move each counted leaf to one side while counting!" (see Fig. 4.4.4). In this way, the rule that the last word indicates the number of the total quantity (last-word-rule) is acquired. By verbalizing as well as monitoring, comparing and evaluating the actions and strategies, these are more consciously perceived. The use of the hand puppet makes it easier for many children to verbalise their actions.

This common exercise with all children is followed by various games (see Fig. 4.4.5) and a wide range of activities specifically aimed at consolidating the determination of quantities through counting-out.

Figure 4.4.4: Children doing the group exercise: one girl is counting the leaves and moving each counted leaf towards herself (photo of the practical realization)

Figure 4.4.5: Children are practicing counting in a game: the chips are thrown – "*How many white chips are there? How many red chips are there*?"

Many counting opportunities should be used so that the children can transfer their counting skills onto new counting tasks *(“How many swings do we have on our playground?, How many apples have we got left?, How many rabbits are on the field?”*). In the next units the children can be supported differently according to their individual abilities. A work sheet on which the number-quantity-allocation can be checked works well with children with different levels of ability. If a result is correct, the children tick the laughing bee, if it is incorrect they tick the sad-looking bee (see Fig. 4.4.6). This task is not obligatory for all children.

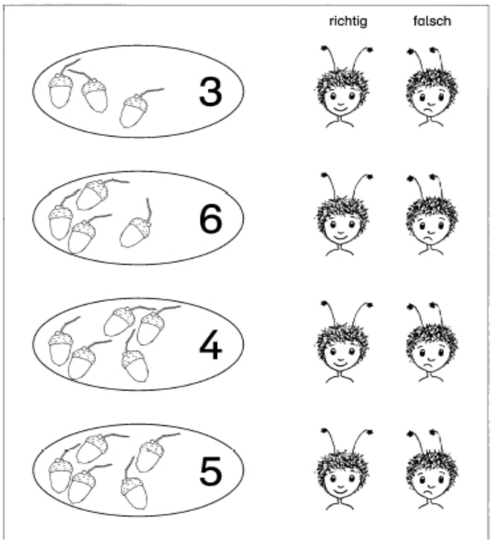


Figure 4.4.6: “*Has Mina counted correctly? Tick!”* (work sheet nr. 36 in *Mina and the Mole*)

Optional support offers

After initially imparting the contents with a structured approach, they are then supplemented by learning through playing and everyday situations. A variety of ways of learning appropriate to the mathematical requirements of the contents are used for the systematic consolidation of each of the 48 topics. The teachers can expand the units depending on the learning rate and interests of the children. The extensive accompanying handbook offers a wide variety of activities (activity games, games with music, board games or parlour games). Numerous suggestions for songs, rhymes and counting-out rhymes (see Fig. 4.4.7) or finger games supplement content and offer easy access to mathematical problems through playing.

Figure 4.4.7: Children jumping according to a German counting-out rhyme (“1 , 2 Polizei – 3, 4 Offizier – 5, 6 alte Hex‘ - 7, 8 gute Nacht- 9, 10 schlafen gehen.“) (Gerlach & Fritz, 2011, handbook p. 98)

The handbook also suggests materials for a math-corner, which should make for autonomous work and play. A series of tips for everyday life suggests ways of integrating the contents into the kindergarten routine. Furthermore, there is an option to make use of different work sheets. Thus, the kindergarten teachers can pick and choose from different tasks and devise the distinct units flexibly regarding the learners’ needs.

Mina and the Mole is not only seen to support mathematical targets. The programme also offers a wide range of interdisciplinary learning opportunities: the stories can be used for language support and as starting points for topics or projects in science, music or education (“Who lives in the forest, who lives at the pond?”, Food and living of mole, bee, squirrel).

Diagnostic integration

It is an advantage to be able to orient oneself to a developmental model that shows when individual concepts are acquired and how these build upon each other. The support of the programme *Mina and the Mole* can be given adaptively, fitting to the diagnosed learning level: The children’s skills can be assessed diagnostically with the MARKO-D-Test (Ricken, Fritz & Balzer, 2013), which can assign a child’s level of performance to a particular level of development. This has the advantage of being able to determine exactly where the support should start. The child’s skills will first be consolidated on his or her level, which will then form the basis on which to impart the competencies of the next level.

Sustainable effectiveness of the math programme

In an evaluation study, the short- and long-term effects on the mathematical abilities of 134 pre-school children of a 6 month-support with the programme *Mina and the Mole* have been successful (Langhorst et al., 2013). In order to establish the pre-school mathematical abilities, the MARKO-D (Ricken, Fritz & Balzer, 2013) was used both for the pre-test (before start of training) and the post-test (6 months after the training towards the end of the last kindergarten year) analysis. For the follow-up test (8 months after finishing the training in the first grade), the school mathematical abilities were established with the MARKO-D-1-Test (Fritz, Ehlert, Ricken & Balzer, in prep.). A control group was not given any particular mathematical support. The results showed significant increases in performance for all supported children immediately after the intervention. Kindergarten children whose teachers used the material of the *Mina and the Mole* programme profited from a marked support effect directly after the end of the training. They had a better starting base for their mathematical learning development. Since these children had been supported with the materials at least up to module 3, they had a better grasp of the level III concepts of cardinality and decomposability, which are particularly important for this moment of transition to primary school. The long-term effects 8 months after finishing the support programme were also significantly stronger for the experimental group than for the control group. Even after attending school for half a year and having math classes almost daily, the advance in performance of the training children was still significant. The intervention appears to provide children with sustainably favourable learning prerequisites.

4.4.1.5 Mathematics and language

Language can be seen as a key medium for teaching and learning mathematics. At a pre-school age, mathematics is exclusively imparted through language. The programme *Mina and the Mole* also has a strong focus on language, since mathematical topics are presented in stories and possible solutions and strategies are worked out and reflected verbally. We will now take a closer look at the connection between linguistic competencies and learning mathematics.

Phonological awareness

In this article, specific language aspects will be dealt with. The focus is on the *formal* aspects of spoken language, i.e. phonological awareness. According to various studies, this is the *most important* precursory skill in the development of learning to read and write and is seen as key predictor for academic reading and writing competence (Goswami & Bryant, 1990; Schneider & Näslund, 1993; Scarborough, 1998).

Phonological awareness is the ability to analyse and manipulate the phonetic structure of spoken language without taking heed of the meaning of the linguistic material (Tunmer & Hoover, 1992) Two different areas are discerned (Skowronek & Marx, 1989; Anthony et al., 2003): phonological awareness *in the broader sense* entails the perception of larger phonetic entities such as syllables in words or the sound of a rhyme. It develops spontaneously before school since it does not require the ability to writing. Phonological awareness can already be supported in 4 to 5-year-olds with exercises that differentiate between syllables or those that require learners to recognise rhymes (Goswami & Bryant, 1990). The phonological awareness *in the narrower sense* entails the conscious use of phonemes (e.g. recognizing onsets, phoneme segmentation). This ability to analyse and synthesize phonemes is only acquired at school age in the concrete exploration of written language and enhanced when learning graphemes at school.
A poorly developed phonological awareness is seen as a risk factor. In a study with 4 to 5-year-olds, a close connection with the reading performance three years later was detected. The pupils with reading deficits had also shown significantly poorer performances in their phonological awareness (Bryant & Bradley, 1985). Similarly, pupils with proven reading and writing difficulties showed poorer performances in phonological awareness than their peers without problems in this area (Klicpera, Gasteiger-Klicpera & Schabmann, 1994; cf. also Ziegler & Goswami, 2005).

Phonological information processing

Phonological awareness is one of the processes of phonological information processing. This encompasses three dimensions (Wagner & Torgesen, 1987). Apart from phonological awareness, there are the two components of phonological recoding: *phonological recoding in the working memory* (verbal memory capacity) enables the short-term storage of sounds and sound units in the working memory, for example in tasks of auditory retentiveness. These entail serial reproduction activities among others when repeating numbers forward or when repeating pseudo words (nonsense words). Another component of phonological information processing is the phonological recoding in the long-term memory when accessing the semantic lexicon. It describes the speed of information, bounded to language (rapid automized naming/ RAN), with which written symbols are recoded verbally (grapheme-phoneme-correspondence).

Phonological awareness and phonological working memory

It can be argued that phonological awareness, as a processing mechanism of the sound structures of linguistic information, is tied to processes and abilities of the phonological memory. According to Baddeley et al. (1998), phonetic material cannot be handled without its participation. Regarding Baddeley‘s (2003) working memory model, a controlling and coordinating component can be assigned to the three mentioned dimensions of phonological information processes: the phonological loop as sub system of the working memory. This is used for the short-term storage and processing of phonological information.

Anthony et al. (2002) recommend including phonological working memory in studies of phonological awareness. However, just how close the relation between phonological awareness and phonological working memory really is, is still being debated (Alloway et al., 2005). Yet, it is difficult to outline them independently as both are components of phonological information processing and both take on the processing of phonological information. Phonological memory feats are necessary, since the word always has to be remembered before it can be used phonetically. Some authors argue that they reflect a common underlying construct (Bowey, 1996; Metsala, 1999; Passolunghi & Siegel, 2001). Cutting and Denckla (2001) also found a significant connection between memory span and phonological awareness. Other authors state that although phonological awareness and phonological loop are both subject to the efficiency of phonological processes, they are embedded in separate cognitive systems (Gathercole, Willis & Baddeley, 1991; Hecht, Torgesen, Wagner & Rashotte, 2001; Alloway, Gathercole, Willis & Adams, 2004). Alloway et al. (2005) view phonological memory feats as separable from phonological awareness, yet they found a correlation of r=.57 in the performances of 4-5-year–old children in this regard. What is more, in their study, the number span forward that actually serves to check the phonological loop turned out to be the predictor for phonological awareness.

This article shares the view of a positive connection between the performances of the phonological loop and the phonological awareness. Especially at a pre-school age, respective demands are made purely verbally and thus without written language. These must therefore be retained in the phonological loop until the cognitive processing is done. Even if there are two distinguishable constructs on the theoretical level, a large overlapping in performance can be assumed.

Connection between mathematics and phonological working memory as well as phonological awareness

In a longitudinal study by Hecht et al. (2001), the causes for the connections between mathematical and linguistic performances are supposed to lie in the described phonological information processing. That means, mathematical performances are also dependent on the conscious processing of phonological information as well as on efficient phonological memory processes. Grube & Hasselhorn (2006) proved a correlation between *phonological working memory* and numeracy for German children at the end of the second and third grade, while Grube (2006) also established this influence for the advanced calculations of second- and fourth-graders. In a study with Canadian primary school children (Rasmussen & Bisanz, 2005) it was stated that the phonological loop represented the best predictor for achievements in verbal mathematical problems from the beginning of the first school year. De Smedt et al. (2009) found the phonological loop to be a useful measure for predicting the mathematical performance of Belgian second-graders.

Phonological awareness is also seen as a determinant for the development of mathematical competencies at primary school age (Alloway et al., 2005; Grube & Hasselhorn, 2006; Passolunghi, Vercelloni & Schadee, 2007). In the above-mentioned longitudinal-study by Bryant & Bradley (1985), the phonological awareness of English pre-school children correlated not only with their reading achievements but also with later mathematical achievements at school. Navarro et al. (2012) asserted that good phonological awareness led to better results in the *Utrecht Early Numeracy Test (UENT)* in a study with 4 to 7-year-old Spanish children. Krajewski et al. (2008b) found a correlation of r=.50 between phonological awareness at pre-school age and the mathematical achievements towards the end of the first grade in German children. The authors found that the acquisition of basic numerical competencies depends on the phonological awareness. According to their study, the support of phonological awareness should facilitate the acquisition of basic numerical skills, such as counting skills. It is important for the acquisition of mathematical precursory skills. But phonological awareness did not account for the differences in the higher quantity-number-competencies or mathematic achievements at school (cf. *ibid*). Phonological awareness thus has a mediating role between working memory sub systems and early numerical competencies (Krajewski & Schneider, 2009).

Phonological awareness in different languages

It is interesting to see whether phonological awareness is subjected to influences of different languages. Children are first able to operate with syllables, rhymes and individual phonemes of words (Goswami & Bryant, 1990; Anthony et al., 2003). For this phonological awareness in the *broader sense*, only "a verifiable insight that one's native or non- native language can be broken down into sounds and sound combinations" (Jannuzi, 1998, p. 8) is necessary. As children implicitly have this ability already at pre-school age, it can be assumed that achievements on this level of mere phonetic analysis of spoken words do not depend on differences in various languages. Studies with English and German children showed that the complexity of syllables in both languages can be equated (Seymour, Aro & Erskine, 2003). Goswami, Ziegler & Richardson (2005) also pointed out a similar development of phonological awareness in the broader sense in English and German “pre-readers”. As for phonological awareness in the *narrower sense*, however, German children far outmatched the English ones in the area of phoneme awareness, which can be attributed to the fact that there is a far clearer phoneme-grapheme-correspondence in the German language (cf. *ibid*). Costard et al. (2007) also refer to differences between English-speaking and German-speaking children because of the comparably less phonetically accurate and thus more complex orthography of English. Since this conscious use of the smallest linguistic entities only develops with acquisition of written language at school age, it is not in the focus of our considerations.

4.4.2 Study

Against the background of this conceptual framework of mathematical concept development and a specific intervention programme, we conducted an inquiry into the effects of the *Mina and the Mole* programme.

In this discussion of the study, we first look at the connection between the performance of phonological awareness in the broader sense, as well as the phonological working memory, and the mathematical performance of the children. The evaluation then focuses particularly on the influence of these phonological language processing achievements on the *increase* in mathematical ability. We posed the following questions:

- Considering the strong language-orientation of *Mina and the Mole*, can linguistically weak children also improve on their *mathematical performance*?
- Can children benefit from the strong language-orientation of the programme with regard to their *phonological language processing*?

4.4.2.1 Design of the study and procedure

The study was based on a quasi-experimental design with a treatment- and a control group. The treatment group was supported regularly in small groups of 6 to 12 pre-school children for a period of six months from January until the end of June 2010. The kindergarten teachers regularly attended further development sessions for the preparation and implementation of the programme at the University of Duisburg-Essen. They were instructed and supervised in advanced training courses once a month, but they carried out the programme independently. The teachers worked with the children in weekly support units of 45 minutes. In addition, they supported the children on a day-to-day basis with the optional tasks of the programme. In doing so, the teachers differentiated between the developmental pace of the children.

In a pre-/post-/follow-up design, the mathematical, linguistic and cognitive performance of the children was verified by trained external test administrators: in November 2009, about a year before school start, in July 2010, after finishing the training, and in March 2011, after the first school semester (see Fig. 4.4.8).

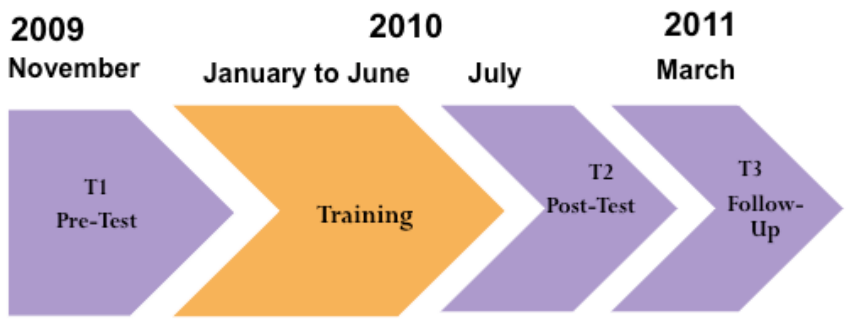


Figure 4.4.8: Course of the study with 3 measuring points

4.4.2.2 Sample

A total of 14 kindergartens from socially and regionally different areas of the city of Essen participated in the study with 248 pre-school children. Eight kindergartens implemented the programme with 134 children. Six kindergartens, with 118 children were willing to have the pre-test carried out in their institutions, but were not interested in the intervention programme. It became necessary for the evaluation to reduce the experimental and control group by individual groups of children. Two institutions (N = 40) had to be excluded from the experimental group, since the kindergarten teachers did not or only occasionally took part in the training sessions. Thus, the experimental group was reduced to N = 94 children.

Furthermore, interviews with the control group showed that two institutions (N = 34) ran their own mathematical support programme independently of the study. For this reason, another two groups of children had to be excluded from the analysis and the control group was reduced to N = 78 children. In addition, the study had to register a drop-out. At the follow-up, 15 children had moved house to an unknown address, 7 children were deferred from starting school, and 13 children could not be reached after entering to primary school.

4.4.2.3 Instruments

Pre-school mathematical ability: Based on the developmental model, the diagnostic test MARKO-D (Ricken, Fritz & Balzer, 2013) was used for the pre- and post-test. According to the number of correctly solved tasks, a level is allocated. The test shows a reliability of Cronbachs α =.91.

Academic mathematical ability: For the follow-up, the test MARKO-D-1 (Fritz, Ehlert, Ricken & Balzer, in prep.; see also Fritz, Ehlert & Balzer in this journal) was used. This test for the first grade is also based on the developmental model. The items of MARKO-D and MARKO-D 1 overlap, with the first grade test containing more items on the higher levels and fewer items on the lower ones. The reliability determined by means of the described sample is Cronbachs α =.91.

Components of phonological information processing

Tasks related to phonological awareness:

In order to ascertain phonological awareness, the standardised testing procedure “BISC” (“Bielefelder Screening zur Früherkennung von Lese-Rechtschreibschwierigkeiten”, Jansen et al., 2002, “Screening for literacy”) and its sub-test “segmenting syllables” (10 tasks) were used. Differentiating and identifying syllables are among the most powerful auditory functions, according to Kiese-Himmel & Reeh (2009). Here, spoken words had to be partitioned into pronounced syllables with the help of clapping at each syllable (e.g. Au-to-bahn). The tasks related to phonological awareness show a reliability of Cronbachs α =.86.

Tasks related to phonological working memory:

The performance of the phonological working memory is among others operationalised through the memory span for number lines (rehearsal process, cf. Hasselhorn, Grube & Mähler, 2000). Therefore, tasks of repeating number lines (2-9, 3-8-6-, 3-4-1-7 etc.) were required here. Phonological working memory performance can furthermore be ascertained through the reproduction of pseudo words (nonsense words) – for this, tasks of repeating senseless syllable sequences of increasing length are used (Baddeley et al., 1998). The differentiation of phonologically aware and less aware children through the repetition of pseudo words has been proven for various languages in several studies (Girbau & Schwartz, 2007). Here, pseudo words such as e.g. "queck", "yib-sott", "rub-loh-piz" etc. were used. The reliability of the phonological working memory performance is Cronbachs α=.77.

4.4.2.4 Results

Ascertaining the mathematical performance data

The mathematical performance was ascertained with two different test procedures (MARKO-D and MARKO-D1) at three measurement points in time. In order to be able to compare the development in performance, the mathematical assessments were represented on a one-dimensional Rasch scale (cf. article of Fritz, Ehlert & Balzer in this journal). Since both test procedures overlap with a large number of items, these overlapping items serve as anchor items, similar to studies with a multi-matrix design. The calculated Rasch model shows the following reliabilities: WLE Person separation - Reliability =.934 (WLE = Weighted Likelihood Estimator) and EAP/PV – Reliability =.927. Almost all items show infit values between 0.8 and 1.2, only three items had infit values between 1.2 and 1.3. All in all, this means that the items fulfil the criteria of the Rasch model (Wright & Linacre, 1994; Adams & Wu, 2002; Rost, 2004) and capture a one-dimensional construct. For the following analyses, the WLE value will be used to estimate the competence at individual level.

Analysis of the phonological scales

As discussed in an earlier section, there is a theoretical distinction between phonological awareness, and the function and performance of the phonological loop. How clearly these two performance areas overlap is still a matter of discussion in the literature, and so far, there has been no apparent consensus. Here, we presuppose two different constructs that have a large overlap in performance. This overlap will be verified in order to analyse the existing connection between the performances and determine a possible multi-collinearity.

An analysis of correlation shows mostly medium-high relations between the two scales: $r=.135$, $p< .05$ and $r=.357$, $p<.01$. Only between the scale *segmenting syllables* (phonological awareness) and *repeating number lines forward* (phonological loop) there is no significant connection.

In a next step, a factor analysis of the scales of the phonological loop and phonological awareness was conducted. The factor analysis confirmed the existing multi-collinearity. This means that the explaining variables correlate highly. In the analysis of the main components all scales comprised *one factor*. Thus, there is a high overlap of the various performances. This factor thus obtained will be called *phonological language processing* in the following, regarding the individual scale requirements described under the section above “Instruments”. Based on this result, the items of *phonological language processing* will be subject to a Rasch analysis items in order to be able to revert to a common test theory, the item-response theory for further data analysis. Since the phonological language processing performance was also measured at three measurement time points, ability scores will be calculated for each measurement time point by means of a multi-matrix design. All in all, the Rasch model exhibits satisfactory reliabilities: WLE Person separation - reliability =.858 (WLE = Weighted Likelihood Estimator) and EAP/PV – reliability =.854. All items show infit values between 0.8 and 1.2. The dichotomous items thus capture a one-dimensional construct so that the WLE value for the estimation of competence on individual level can be used in the following to verify the hypotheses in the research questions.

Influence of phonological language processing on the mathematical abilities and their increase

When examining the connections between phonological language processing performance at t1, and the mathematical abilities measured at the three different measurement time points, and the increase in mathematical abilities, it becomes obvious that the phonological language processing ability and the *mathematical abilities* correlate at all measurement points in time. However, there are no connections between the phonological language processing ability at t1 and the *increase* in mathematical ability between the measurement time points t1 and t2as well as t2 and t3 (see Table 4.4.1).

Table 4.4.1: Influence of the phonological language processing at t1 on the increase in mathematical ability (WLE)

Phonological language processing ability at t1	**mathem. ability at t1**	**mathem. ability at t2**	**mathem. ability at t3**	**Increase in math. ability t1-t2**	**Increase in math. ability t2-t3**
Experimental group	.384***	.277*	.336**	-.134, p=.222	.125, p=.302
Control group	.283*	.292*	.401**	-.007 p=.957	.227, p=.084

*significant at the level p<.05, **significant at the level p<.01, ***significant at the level p<.001

In a next step, we will now analyse whether the extent of phonological language processing leads to differences in the increase of mathematical ability during the intervention phase. For this, phonological language processing groups are formed. All children whose phonological language processing ability lies at ≤ the 20th percentile are assigned to a phonologically weak language processing group, according to their inclusion in the experimental group or the control group. If their language processing ability lies at ≥ the 80th percentile, the children are assigned to a phonologically strong language processing group. The other children form the average language processing group (see Table 4.4.2).

Table 4.4.2: Phonological performance of the language processing groups at t1

language processing groups	N		phonological language processing ability at t1	
	Experimental group	Control group	Experimental group	Control group
Weak performance (≤percentile 20)	22	17	-2.15 (SD=0.53)	-2.11 (SD=0.47)
Average performance (>percentile 20 and <percentile 80)	41	49	-0.54 (SD=0.49)	-0,52 (SD=.48)
Strong performance (≥percentile 80)	30	11	1.23 (SD=0.91)	.80 (SD=0.47)

By means of a variance analysis with repeated measurement, with mathematical ability at the individual measurement time points as inner-subject-factor ("measurement time point") and the phonological language processing group assignment as between-subject-factor ("group assignment"), the influence of the extent of the phonological performance on the mathematical development will now be analysed. For the experimental group, there is a significant effect for the factor measurement time point directly after completion of the training, $F(1, 82)=131.473$, $p<.001$, part. $\eta^2=.62$, yet there is no significant effect for the factor group assignment, $F(2, 82)=0.945$, $p=.393$, part. $\eta^2=.02$. Thus, the children of the experimental group show a significant increase in performance regarding their mathematical development from t1 to t2, while the belonging to a phonological language processing group does not have a significant influence on the mathematical development. This means that significant supportive effects can be observed even for those children with weak phonological language processing performance.

Influence of the programme on the development of phonological language processing

As the supportive programme *Mina and the Mole* represents a strongly language-oriented intervention, it has been assumed that the learning support does not only have a positive influence on mathematical concept acquisition, but also on phonological language processing. We will check in a last step to what extent the programme also supports phonological language processing.

For this, the phonological language processing *increase* of the experimental and control group children between the measurement time points t1 and t2 is compared. There are slight effects in favour of the experimental group of the *weak* phonological language processing group (t(33)=.856, p=.398, d=.29), although there are no significant differences to the control group. However, it must be stressed that the children within the *average* language processing group do differ (t(74)=2.006, p<.05, d=.46). The children of the experimental group here achieve a higher phonological language processing increase than the children of the control group, M_{Ex}=.86 (SD=1.3), M_{Ex}=.34 (SD=1.0). In the *strong* language processing group, there are no differences between the phonological language processing increase of the children, t(34)=-.927, p=.927, d=-0,03.

4.4.3 Discussion

In this article, we introduced the learning support programme *Mina and the Mole* which is based on an empirically verified developmental model. The short- and long-term effects of the programme on the mathematical abilities of children aged 5 to 7 have already been proved in an evaluation study. Since the programme is strongly language-oriented, the present study examined the phonological language processing performance of children in more detail. Here, new research aspects were particularly interesting. On the one hand, the question of whether the language-oriented approach might be detrimental to the mathematical support effects with linguistically weak children, and, on the other hand, the question whether children might even benefit from such a language-oriented mathematical programme regarding their phonological language processing performance.

In this study, a connection was found for 5 to 7-year-old children between mathematical abilities and phonological language processing performance, which consisted here of a combined scale of performances of phonological awareness and phonological working memory. The children showed *mathematical abilities* that were consistent with their respective phonological language processing performances. This means that children with lesser language processing performances also showed lesser mathematical abilities whereas strong language processing performances were connected with well-developed mathematical abilities. This result confirms the findings of numerous other studies.

Considering the strong language-orientation of the programme "Mina and the Mole", can linguistically weak children also increase their mathematical performance?

There were no connections between phonological language processing ability and an *increase in mathematical ability*. In order to examine a possible influence of phonological language processing on an increase in mathematical ability performance-related immediately after the intervention phase, all children were assigned to three groups according to their phonological language processing performances – weak, average, or strong – at the first measurement time point. It was found that *all* children of the experimental group showed a significant increase in their mathematical abilities *independent of which phonological language processing group they belonged to*. This means that the *extent* of the phonological language processing performance did not have a significant influence on the increase in mathematical ability. Regarding the programme, we come to the positive conclusion that its strong language-orientation does not constitute an obstacle for the children: children with weak language processing performances improved their mathematical abilities as significantly as children with average or strong language processing performances did.

Can children profit from the strong language-orientation of the programme also regarding their phonological language processing?

Apart from the conclusion that the language-orientation of *Mina and the Mole* is not a disadvantage for the acquisition of mathematical understanding, the study furthermore showed that the programme could even have a supportive effect on the phonological language processing performances of the children. Although the programme does not offer explicit exercises that systematically support phonological awareness in the broader sense or the phonological working memory, language has a considerable share in it, in the stories, in the picture book, in the instructions, when playing, reflecting, and working with it in every-day-life. In addition, mathematical contents are often presented in connection with language through games, songs, or counting-out rhymes in the programme. As a consequence, unspecific secondary effects were expected from the programme in the experimental group. The analysis in this regard of the three performance groups showed that the children from the experimental group with the average phonological language processing performances

(performances between >percentile 20 and <percentile 80) displayed a significant increase in performance in their phonological language processing immediately after the programme. Thus, these children could also benefit considerably from the mathematics training regarding their phonological skills. Even for the children of the experimental group with the weak phonological language performances slight effects could be shown and therewith tendencies for the success of the programme. Although the kindergarten teachers did not focus on consciously imparting linguistic aspects when doing the training, the accompanying verbalization of learning mathematics seems to be advantageous for the average and weak children and to lead to an improvement of their phonological language processing performances. With a view on further learning, the phonological secondary effect of the programme could be an enriching opportunity to prevent and compensate difficulties when learning to read and write for weak and average children.

Finally, another important purpose of the programme should be noted. As we pointed out, the supportive programme *Mina and the Mole* offers effective opportunities for children to acquire and improve basic arithmetic competencies at pre-school age. But since the training targets four to eight year old children, it is not only suitable for education in kindergarten but also for the support of mathematical weaker children in grade one and two at primary school. For an ongoing development support, the training can be started with younger kindergartners and preschoolers, and can be continued in primary school. So pupils can go on with their mathematical learning, using the familiar training material. Such a continuous, cooperative work with the programme undoubtedly makes the education of both institutions more effective. Thus, the programme could contribute a successful and smooth transition from kindergarten to primary school.

5 Zusammenfassende Diskussion

Grundsätzlich ging diese Arbeit davon aus, dass für die Konzipierung einer frühen mathematischen Bildung präzise Entwicklungsbeschreibungen über die wesentlichen arithmetischen Konzepte notwendig sind. Die genaue Kenntnis der Entwicklung bietet für die Förderung Orientierung, welche Fähigkeiten für ein tragfähiges arithmetisches Verständnis bedeutsam sind und wann sie erworben werden. Die vorliegende Arbeit befasste sich mit zwei Forschungsanliegen:

- Aus dem komplexen Entwicklungsverlauf wurde das Teile-Ganze-Konzept herausgegriffen und im Ergebnis konnten durch die Studien einzelne Fähigkeitskomponenten des Teile-Ganze-Konzepts und ihre Verfügbarkeit bei 4- bis 8-Jährigen und Fünftklässlern näher spezifiziert werden (vgl. Kap. 5.1).
- In Bezug auf die mathematische Frühförderung lag der Schwerpunkt auf der Fragestellung, wie die grundlegenden arithmetischen Fähigkeiten im Vorschulalter angemessen gefördert werden können. Im Ergebnis konnte die Wirksamkeit eines systematischen Fördertrainings in drei Studien unter verschiedenen Gesichtspunkten nachgewiesen werden (vgl. Kap. 5.2).

5.1 Das Teile-Ganze-Konzept

5.1.1 Zentrale Befunde zum Teile-Ganze-Konzept

Studie I

In der ersten Studie wurden Erkenntnisse über die Verfügbarkeit des Teile-Ganze-Konzepts in Textaufgaben zu 6 verschiedenen Teile-Ganze-Inhalten bei 181 Kindern im Alter von 4 bis 8 Jahren gewonnen. Das Besondere an der Studie war, dass sie sich einer umfassenden Untersuchung vieler Teile-Ganze-Inhalte gewidmet hat, die zudem differenziert nach nicht-numerischen und numerischen Anforderungen beleuchtet wurden. In der Forschung wurde sich bislang meistens nur gesondert mit ausgewählten Teile-Ganze-Inhalten befasst. So lagen vor allem Modelle und Befunde zu Additions- und Subtraktionsaufgaben vor (u.a. Hunting, 2003; Resnick, 1989, 1992; Pepper & Hunting, 1998; Sophian & McCorgray, 1994; Riley & Greeno, 1988; Briars & Larkin, 1984). Es ergab sich folgender neuer Befund: Mittels einer Raschanalyse ließen sich zwei Entwicklungs- bzw. Fähigkeitsbereiche in Form einer nicht-numerischen Dimension mit Teile-Ganze-Aufgaben ohne Zahlbezug und einer numerisch präzisen Dimension mit Aufgaben zur exakten Quantifizierung identifizieren. Innerhalb der beiden Dimensionen wurden zudem jeweils zwei hierarchisch sukzessiv aufeinander aufbauende Entwicklungsniveaus festgemacht. Insgesamt gelang es dadurch, relevante Entwicklungsabschnitte beim Erwerb des Teile-Ganze-Konzepts deutlicher zu charakterisieren:

Leistungen der Kinder im Umgang mit den nicht-numerischen Teile-Ganze-Anforderungen, bei denen nur Urteile in Form von „mehr/weniger/gleich“ ausgedrückt werden mussten

Auf dem ersten Niveau verstanden die Kinder auf Anschauungsebene grundlegend das Prinzip des Vermehrens einer Menge und zeigten erste Einsicht in Teile-Ganze-Verhältnisse der Kovarianz und in das einfache Zerlegen. Auf diesem Niveau befanden sich ca. 36 % der 4-jährigen und 18 % der Vorschulkinder. *Alle* anderen Kindergartenkinder und erwartungsgemäß auch jedes Schulkind haben die anschauungsgebundenen, nicht-numerischen Aufgaben bereits sicher gelöst.

Auf dem zweiten Entwicklungsniveau lösten Kinder auf abstrakte Art ohne Material nicht-numerische Additions- und Subtraktionsaufgaben, erkannten Teilmengenveränderungen und verstanden das Prinzip des Mengenerhalts. Beachtlich war, dass schon ungefähr zwei Drittel der 4-jährigen und knapp 80 % der 5-jährigen Kindergartenkinder dazu in der Lage waren. Knapp die Hälfte der Erstklässler (46.7 %) und ein Drittel der Zweitklässler erbrachten derartige Leistungen. Die anderen Schulkinder zeigten bereits ein besonders gesichertes nicht-numerisches Teile-Ganze-Verständnis.

Leistungen der Kinder im Umgang mit den numerischen Teile-Ganze-Anforderungen

Auf Niveau I zeigten die Kinder ein erstes numerisch präzises Teile-Ganze-Verständnis. Sie verfügten hier über Vorstellungen des Vermehrens und Verminderns und über Manipulationen an Teilmengen auf Zahlebene und bewiesen in einfachen Aufgaben zur Beurteilung von Zahlzerlegungen erste Erkenntnisse über den Mengenerhalt. Es fiel auf, dass drei Viertel der 4-jährigen Kindergartenkinder und ein Drittel der 5-jährigen Vorschulkinder noch keinerlei Fähigkeiten besaßen, einfache Teile-Ganze-Aufgaben numerisch präzise zu lösen. Bei den Schulkindern wiesen 55.6 % der Erstklässler und 21.7 % der Zweitklässler Leistungen auf diesem Niveau auf.

Auf Niveau II zeigte sich ein erweitertes numerisch präzises Teile-Ganze-Verständnis. Kinder konnten damit schwierigere Aufgaben zur Beurteilung von Mengenzerlegungen und Teilmengenveränderungen bis 20 lösen. Aufgaben zum additiven und subtraktiven Ermitteln der Startmenge wurden nun bewältigt. Kindern gelang hier schließlich erstmalig das eigenständige Finden von unterschiedlichen Zerlegungen mit Zahlen. Kein Kindergartenkind (mit Ausnahme von 2,2 % der Fünfjährigen) vermochte die schwierigeren numerischen Teile-Ganze-Aufgaben präzise zu lösen. 40 % der Erstklässler und 52.2 % der Zweitklässler waren dazu fähig. Bemerkenswert war, dass kaum ein Erstklässler und nur 26.1 % der Zweitklässler das hohe Entwicklungsniveau eines bereits sehr flexiblen Teile-Ganze-Verständnisses erreichten.

Studie II und III

Zwei weitere Studien gaben Aufschluss über die Verfügbarkeit des numerisch präzisen Teile-Ganze-Verständnisses für unterschiedliche Additions- und Subtraktionsaufgaben bei Kindern des zweiten und fünften Schuljahres:

Ergebnisse von Studie II: Leistungen der Zweitklässler

245 Zweitklässlern wurden 12 Aufgaben zur Endmenge, Austauschmenge und Startmenge und Vergleichsaufgaben um das Zahlentripel 6-7-13 präsentiert. Beinahe allen Kindern gelang erfolgreich die Lösung von Teile-Ganze-Aufgaben zur Ermittlung der *Endmenge* auf unterschiedlichen Präsentationsebenen. Auch das Finden der *Austauschmenge* bereitete den Kindern kaum Schwierigkeiten. Einschränkend sei hier gesagt, auch in Bezug auf die Leistungen in Studie I, dass die Aufgaben zur Endmenge generell von Kindern durch einfache Zählstrategien gelöst werden können - der determinierte Zusammenhang zwischen den beiden Teilmengen und der Gesamtmenge muss noch nicht verstanden sein. Der Schwierigkeitsgrad der Textaufgaben, bei denen die Kinder nicht auf eine bildhafte oder numerische Präsentation zurückgreifen konnten, wurde über den Aufgabentyp bestimmt. Probleme traten bei den Aufgaben mit unbekannter *Startmenge* auf (69 % Lösungshäufigkeit), die eine flexible Anwendung des Teile-Ganze-Konzepts voraussetzten. Als besonders schwierig erwiesen sich darüber hinaus die *Vergleichsaufgaben*, die neben dem Teile-Ganze-Konzept ein relationales Zahlverständnis erforderten (48 % Lösungshäufigkeit).

Ergebnisse von Studie III: Leistungen der Fünftklässler

1671 Haupt-, Real,- Gesamt- und Gymnasialschülerinnen und –schülern wurden 6 Textaufgaben und 4 symbolische Rechenaufgaben präsentiert. Es zeigte sich, dass insbesondere die Hauptschülerinnen und -schüler große Probleme beim Lösen der Teile-Ganze-Aufgaben hatten. Auffällig war, dass zum Beispiel die als einfach zu bewertenden Austauschaufgaben nur geringe Lösungsquoten aufwiesen. Nur 35 % der Hauptschülerinnen und -schüler und 48 % der Gesamtschülerinnen und -schüler lösten die subtraktive Austauschaufgabe. Auch das recht einfache Ermitteln einer zweiten Teilmenge durch additives Ergänzen gelang in

Textaufgaben bloß zu 57 % (HS) bzw. 67 % (GE). Hervorzuheben ist hier das vergleichsweise bessere Abschneiden der Zweitklässler. Sie lösten ihre kontextuellen Austauschaufgaben mit durchschnittlich 86 %. Die Aufgabe zum Modellieren der Startmenge fiel ebenfalls schwer. Nur 44 % der Fünftklässler der Hauptschule (47 % (GE), 70 % (RS)) lösten die Aufgabe: *„Laura hat am zweiten Tag noch 12,50 Euro mit. Am ersten Tag hat sie 7,30 Euro ausgegeben. Wie viel Geld hatte sie am Anfang?“*. Gravierende Schwierigkeiten traten auch bei den Vergleichsaufgaben auf. Über alle Schulformen hinweg lösten nur 22 % der Schülerinnen und Schüler die Aufgabe: *„Sarah und David haben zusammen 28 Plätzchen gegessen. David hat 6 Plätzchen weniger gegessen als Sarah. Wie viel hat David gegessen?“*. Eine Analyse der besonderen Schwierigkeiten im Umgang mit *Vergleichsaufgaben* wurde hier nicht näher vorgenommen, da Vergleichsaufgaben keine reinen Teile-Ganze-Anforderungen beinhalten.

5.1.2 Theoretische Bedeutung der Studien zum Teile-Ganze-Konzept

Die Arbeit hat aus theoretischer Forschungssicht in folgenden Aspekten einen klärenden Beitrag geleistet:

- ***Nicht-numerische und numerisch präzise Entwicklungsdimension***

Studie I lieferte wertvolle Erkenntnisse zu den nicht-numerischen und numerisch präzisen Teile-Ganze-Vorstellungen: Eine differenzierte Analyse der Dimensionen sprach für einen zeitlich versetzten Entwicklungsverlauf – bestätigen ließen sich die frühe Verfügbarkeit der nicht-numerischen Vorstellungen und die zeitlich etwas spätere Entwicklung des numerischen Teile-Ganze-Verständnisses. Das nicht-numerische Teile-Ganze-Verständnis ist den Befunden zufolge allerdings *nicht* die Voraussetzung für das numerisch präzise Verständnis. Beachtlich ist, dass Kinder also nicht zunächst alle Teile-Ganze-Anforderungen im nicht-numerischen Bereich vollständig durchschauen müssen - schon vorher vermögen sie einige Teile-Ganze-Anforderungen mit Zahlen präzise zu erfüllen. Numerische Teile-Ganze-Vorstellungen ersetzen nicht einfach automatisch im Lauf der Zeit die nicht-numerischen Vorstellungen. Dass der Erwerb teilweise als parallel einzuordnen ist, zeigte sich selbst noch bei Kindern des ersten Schuljahres: knapp die Hälfte der Erstklässler konnte zwar die einfachen Teile-Ganze-Aufgaben mit präzisen Ergebnisse lösen, Anforderungen zu komplexeren *nicht-numerischen* Teile-Ganze-Beziehungen bewältigten diese Kinder hingegen noch nicht. Um Aussagen über die genauen *Entwicklungsverläufe* im frühen Alter treffen zu können, wäre es ein künftiges Forschungsinteresse, die nicht-numerischen und numerisch präzisen Teile-Ganze-Fähigkeiten im Längsschnitt zu prüfen.

- ***Zusammenhang zwischen den Entwicklungsbereichen***

Es lagen bislang kaum empirische Befunde zum *Zusammenhang* des nicht-numerischen und des numerisch präzisen Teile-Ganze-Verständnisses vor. Laut Baroodys et al. (2003) Interpretationen sind einzelne Wissensbereiche des Teile-Ganze-Schemas zunächst voneinander getrennt bzw. nur locker miteinander verbunden. Auch Resnick (1983) geht davon aus, dass Kinder zunächst ein simples Teile-Ganze-Verständnis besitzen, das sie noch nicht mit allen Anforderungsbereichen zu vereinbaren wissen. Mit dieser Annahme gehen ebenso Sophian & McCorgray (1994) überein, indem sie konstatieren, dass 5-Jährige ihr Wissen über Mengenbeziehungen noch nicht auf numerisch präzise arithmetische Operationen übertragen können. Diese Aussagen konnten durch die beiden hier identifizierten Dimensionen bekräftigt werden. Die beiden Entwicklungsbereiche scheinen zwar nicht gänzlich voneinander unabhängig zu sein und korrelieren hoch miteinander, ihr Erwerb verläuft allerdings teilweise nebeneinander. Nach Studie I sind manche Anforderungen im nicht-numerischen Bereich durchaus bereits zu verstehen und zu modellieren, sie sind aber offenkundig im numerisch präzisen Bereich sehr schwer zu bewältigen. Die bei manchen Teile-Ganze-Anforderungen mangelnde Integration der Vorstellungen wurde besonders deutlich bei den Schwierigkeiten zum Finden der Startmenge und von Zahlzerlegungen: Diese Aufgaben wurden numerisch *unpräzise* schon von sehr vielen Kindergartenkindern mit Materialhilfe gelöst. Jedoch konnte *kein* Kindergartenkind die Startmenge *präzise* ermitteln oder Zerlegungen mit Zahlen abstrakt vornehmen. Das überrascht nicht, denn entwicklungsgemäß ist das Verständnis zu diesem Zeitpunkt noch nicht gegeben. Auffällig war aber, dass die numerisch präzisen Anforderungen zur Startmenge und zur flexiblen Zahlzerlegung von den *Schulkindern* erst sehr spät erfüllt werden konnten: 55.6 % der Erstklässler vermochten diese Aufgaben nicht zu lösen, obwohl die Fähigkeiten im *nicht-numerischen* Bereich anschauungsgebunden bei *allen* Schulkindern bereits verfügbar waren.

Baroody (1999) vermutet, dadurch dass die meisten Aufgaben symbolisch dargeboten würden, könnten viele Kinder sie nicht mit ihrem intuitiven Verständnis von Teile-Ganze-Beziehungen *verbinden*. Diese Annahme kann anhand der Ergebnisse der Fünftklässler bestätigt werden, denen symbolische Rechenaufgaben gestellt wurden. Selbst die einfache Austauschaufgabe 46 -__=12 wurde an den Hauptschulen zu 46 % und an den Gesamtschulen zu 58 % gelöst. Diese anscheinend fehlende Integration kann einen Ansatzpunkt liefern für den unterrichtspraktischen Umgang mit fortbestehenden Schwierigkeiten von Kindern, trotz eines gegebenen Teile-Ganze-Verständnisses, numerisch präzise mit Zahlen modellieren zu können.

- ***Besondere Schwierigkeiten beim Erwerb des Teile-Ganze-Konzepts***

Auf Basis der Untersuchungen an den Zweit- und Fünftklässlern konnten kritische Entwicklungsschritte beim Erwerb des Teile-Ganze-Konzepts identifiziert werden, die eine zielgerichtete Berücksichtigung von Schwierigkeiten ermöglichen. Es handelte sich, wie oben dargestellt, um die Fähigkeiten zur additiven und subtraktiven Ermittlung der Austauschmenge und Startmenge. Denkwürdig war, dass Fünftklässler trotz ihres deutlich längeren Schulbesuchs hinsichtlich der beiden Aufgabentypen kein besseres Ergebnis erzielten als die Zweitklässler. Dass der triadische Zusammenhang des Teile-Ganze-Konzepts noch nicht hinlänglich verstanden wurde, zeigte auch die symbolische Rechenaufgabe zur Startmenge __-239=122, die durchschnittlich nur von 55 % der Fünftklässler bewältigt wurde. Entwicklungsgemäß müssten die Fünftklässler die Prinzipien verstanden haben, dennoch ergaben sich Schwierigkeiten in diesem fortgeschrittenen Entwicklungsstadium. Die Leistungen der Fünftklässler implizieren, wird das Teile-Ganze-Konzept in der Grundschule nicht stabil erworben, kann das ein nachhaltiges Hindernis in späteren Jahren darstellen. Diese Hypothese wurde hier nicht anhand derselben Stichprobe geprüft - eine entsprechende längsschnittliche Untersuchung mit Schulkindern wäre von besonderem Forschungsinteresse.

Insgesamt soll festgehalten werden: Eigentlich sollten Kinder aus einem grundlegenden Teile-Ganze-Verständnis heraus sukzessiv ein komplexeres Teile-Ganze-Konzept konstruieren können. Bleiben Strategien unverstanden, wie z. B. zur flexiblen Zahlzerlegung, zum komplementären Zusammenhang von Addition und Subtraktion oder auch zum kovariaten Ableiten oder zum Nutzen von Tauschaufgaben, ist anzunehmen, dass sich die Schwierigkeiten im größeren Zahlenraum sowie bei komplizierteren Problemstellungen ausweiten werden. Ist das grundlegende Verständnis nicht gegeben, wird es Kindern nur erschwert oder kaum möglich sein, das Teile-Ganze-Konzept für aufbauende höhere Konzepte zu interpretieren, die für das Begreifen der Multiplikation, Division, Bruchrechnung oder des Stellenwertsystems vonnöten sind.

5.1.3 Praktische Bedeutung der Studien

Vor dem Hintergrund, dass das Teile-Ganze-Konzept eine zentrale Leistung im mathematischen Kompetenzerwerb darstellt, muss Kindern der zielführende Erwerb einer tragenden Basis ermöglicht werden. Die fördernde, explizite Instruktion von Inhalten des Teile-Ganze-Konzepts wird als ausgesprochen bedeutsam und wirksam erachtet (Steinke, 2008; Young-Loveridge, 2002; Gerster & Schultz, 2004; Fischer, 1990). Dazu soll noch einmal hervorgehoben werden, dass die Anwendung des Grundverständnisses des Teile-Ganze-Konzepts auf unterschiedliche quantitative Anforderungen nicht automatisch erfolgt (Sophian & McCorgray, 1994). Das heißt, für ein umfassendes Verständnis muss das Konzept erlernt und instruiert werden. Dieser Anspruch sollte bereits für die vorschulischen Einrichtungen bestehen, denn der Erwerb des Teile-Ganze-Konzepts beginnt schon weit vor dem ersten Mathematikunterricht in der Schule. Studie I, in der bei Kindergartenkindern frühe Fähigkeiten nachgewiesen wurden, Teile-Ganze-Beziehungen angemessen zu durchschauen, wenn nur „mehr/weniger/gleich“-Urteile gefordert waren, liefert Evidenz für ein Aufgreifen von vorhandenem Vorwissen bei Kindergartenkindern.

Das Teile-Ganze-Konzept in vorschulischen Einrichtungen

In der vorschulischen Förderung sollte genutzt werden, dass Kinder Beziehungen zwischen den Teilen und dem Ganzen in Mengen erkennen können, bevor sie verstehen, dass Zahlen auch diese Beziehungen haben (Resnick, 1992). In Studie I wurden gute Voraussetzungen der Kinder hinsichtlich der Bearbeitung von Teile-Ganze-Inhalten auf *anschauungsgebundene* Weise festgestellt. Daraus abgeleitet, kann sich das nicht-numerische Teile-Ganze-Verständnis durch den häufigen Umgang mit konkreten Anschauungsmaterialien und aus der Erfahrung in vielfältigen Aktivitäten im Kindergartenalltag konstruieren. Aktiviert werden können Teile-Ganze-Vorstellungen auch durch die kontextuelle Einbindung von Aufgaben, denn die Studienkinder zeigten gute Voraussetzungen zum Durchschauen von Textaufgaben. Für die frühe Förderung bieten demzufolge Textaufgaben bzw. kleine Rechengeschichten die Möglichkeit, Kinder erste grundlegende Beziehungen zwischen Mengen und später Zahlen entdecken zu lassen. Sie erlauben bereits bei Kindergartenkindern, die noch nicht mit dem Rechnen vertraut sind, ein frühes Ansprechen des Wissens. Es muss nicht abgewartet werden, bis Kinder über vollständiges Zählwissens verfügen. Young-Loveridge (2002) betont, dass das Zählen zwar sehr bedeutsam ist, es muss jedoch nicht der erste Schritt in Richtung der Entwicklung eines Teile-Ganze-Verständnisses sein, wenn in frühen Jahren das Konzept angeregt werden soll.

Bei der Konzipierung von vorschulischen Fördermaßnahmen sollte sich bereits die wesentliche Bedeutung des Teile-Ganze-Konzepts niederschlagen. Oftmals besteht jedoch in Kindergärten noch Unsicherheit in der richtigen Einschätzung der Fähigkeiten und über den optimalen Zeitpunkt für ihre Vermittlung. Die Förderung des Teile-Ganze-Konzepts stellt Erzieherinnen und Erzieher vor eine große Herausforderung. Es wäre wünschenswert, wenn sie sich auf Förderprogramme stützen könnten, in denen die Erkenntnisse über das Teile-Ganze-Konzept angemessen Berücksichtigung finden. Einige Trainingsprogramme sprechen bereits explizit Teile-Ganze-Inhalte an, wie zum Beispiel das „Förderprogramm zur Entwicklung des Zahlbegriffs" (Peucker & Weißhaupt, 2005) oder das Programm „Mengen, zählen, Zahlen" (Krajewski, Nieding & Schneider, 2007). In dem Fördertraining „Mina und der Maulwurf" (Gerlach & Fritz, 2011) wird das Teile-Ganze-Konzept vielfältig vorbereitet: Teilmengenoperationen werden zunächst handelnd vorgenommen. Fähigkeiten zum Vermehren und Vermindern werden gefördert, das Konzept der Zerlegbarkeit wird erarbeitet und Teile-Ganze-Beziehungen im Sinne von Teilmengveränderungen werden angesprochen. Das Inklusionsverständnis und erste Einsichten in Inversionsbeziehungen der Addition und Subtraktion werden angebahnt.

Praktischer Nutzen für die Unterrichtspraxis im Anfangsunterricht

Bezeichnenderweise hatten die Erstklässler noch nicht alle Vorstellungen des *nicht-numerischen* Teile-Ganze-Verständnisses auf abstrakte Weise erworben. Zudem konnte kaum ein Erstklässler alle ausgewählten *numerisch präzisen* Teile-Ganze-Anforderungen vollständig sicher bewältigen.

Im mathematischen Anfangsunterricht ist die Thematisierung von Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen zwar verbindlicher Unterrichtsstoff und das Verständnis wird durch gezielte Übungen aufgebaut, aufgrund der vorliegenden Befunde könnte dazu jedoch ergänzend die Berücksichtigung folgender Überlegungen vielversprechend sein:

- Grundsätzlich ist es von Bedeutung, auch die Vorstellungen zum *nicht-numerischen* Teile-Ganze-Verständnis im Unterricht weiter anzuregen und es mit dem Anzahlverständnis zu verbinden. Ein häufiges Zusammenführen von Mengen- und Zahlwissen soll Kinder darin unterstützen, ihr Teile-Ganze-Wissen auf Zahlen zu übertragen.
- Es empfiehlt sich, im Anfangsunterricht nicht zu schnell zum formalen Rechnen überzugehen. Kinder sollten anschauungsgebunden zunächst hinreichende Teile-Ganze-Vorstellungsfähigkeiten entwickeln können.

- Damit Kinder komplexere Teile-Ganze-Beziehungen interpretieren lernen, sind immer wieder Aufgabenformen anzubieten, die unterschiedliche Präsentationsebenen ansprechen. Kindern sollte die Möglichkeit gegeben werden, Beziehungen zwischen Mengen mit konkretem Material flexibel zu manipulieren, damit sie verstehen, dass Addition und Subtraktion nicht nur das Vermehren und Vermindern von Mengen sind, sondern Operationen, mit denen *Beziehungen* zwischen Mengen und Zahlen zu modellieren sind.
- Die Vermittlung von Teile-Ganze-Inhalten sollte sich nicht allein auf die Addition und Subtraktion beschränken. Es wurde in Studie I gezeigt, dass Kinder auch über Wissen hinsichtlich Mengen- und Zahlbeziehungen in *anderen* Teile-Ganze-Inhalten verfügten. Dieses Wissen über zum Beispiel Prinzipien der Kompensation oder Kovarianz zu nutzen oder herauszufordern, bringt das Verständnis u. a. für Ableitungsstrategien auf einen guten Weg.

Über die eigenen Schlussfolgerungen hinaus seien an dieser Stelle folgende mathematikdidaktische Aspekte für die konkrete unterrichtspraktische Arbeit zu Teile-Ganze-Inhalten genannt:
Laut Gerster und Schultz (2004) ist es wohl die wichtigste didaktische Aufgabe im mathematischen Anfangsunterricht, das Teile-Ganze-Verständnis als Grundlage für weiterführendes, ungemein flexibles Rechnen zu erachten, um vom rein mechanischen oder zählenden Rechnen abzukommen, das Einsichten in Beziehungen zwischen Mengen versperrt. Kinder können durch Übungen zur strukturierten Anzahlerfassung Einsicht in Zahlbeziehungen erlangen und sich vom zählenden Rechnen zugunsten von effizienteren Rechenstrategien lösen (Krauthausen & Scherer, 2007). Durch gezielte Instruktionen im anfänglichen Mathematikunterricht entsteht basierend auf dem Teile-Ganze-Konzept die Ausbildung von Strategien, die es erlauben Additions- und Subtraktionsaufgaben ausgehend vom Teile-Ganze-Prinzip letztlich immer auf die einfachen Grundaufgaben des kleinen Einspluseins zu reduzieren (Dornheim, 2008). Strategien zum Teile-Ganze-Konzept nehmen die Verinnerlichung der Zerlegungen der Zahlen 5 und 10, Zahlverdopplungen, Zehneranalogien oder die Umkehroperationen als Ausgangspunkte (Gerster & Schultz, 2004; Peucker & Weißhaupt, 2005). Werden die Aufgaben des kleinen Einspluseins bis 20 gedächtnismäßig beherrscht, sind ihre Zerlegungsmöglichkeiten für ein gutes Verrechnen bekannt und sind Ableitungsstrategien verfügbar, entfallen lange, fehleranfällige Zählprozeduren (Carpenter & Moser, 1984). Die Konstruktion von Beziehungen von Zahlentripeln bis 10 bereitet die

Speicherung und den gedächtnismäßigen Abruf von Rechenfakten vor und macht mühsame Zählstrategien überflüssig. Im Alter von 7 bis 10 Jahren sind dann Rechenoperationen über die Kombination von Rechenfakten und die Nutzung von dezimalen Analogiebeziehungen lösbar, vermittelt über dezimales Wissen und seine Verbindung mit dem Teile-Ganze-Konzept (Dornheim, 2008). Ähnlich wie im vorschulischen Bereich kann das Teile-Ganze-Konzept durch einfache Textaufgaben geeignet zugänglich gemacht werden:

> „Textaufgaben fördern die Integration des protoquantitativen Wissens mit Zahlen, da es in Textaufgaben um dieselben grundlegenden Beziehungen zwischen Mengen geht. Ihre Bearbeitung entwickelt nicht nur die mathematischen Problemlösefähigkeiten, sondern auch die Interpretation von Zahlen mittels der protoquantitativen Beziehungen, insbesondere der Beziehung der Teile zum Ganzen“ (Gerster & Schultz, 2004, S. 78).

Das Teile-Ganze-Konzept in höheren Schuljahren

Grundvorstellungen zum Teile-Ganze-Konzept sollten auch im Unterricht des 2. Schuljahres wie soeben beschrieben weiterhin anhaltend angesprochen und vermittelt werden. Die Betrachtung der Leistungen der Zweitklässler zeigte zwar, dass sie bereits über gute Teile-Ganze-Vorstellungen verfügten, wenn es um einfache Additions- und Subtraktionshandlungen ging, die durch Anschauung oder durch sprachlich eindeutige Handlungsabfolgen unterstützt sind, Probleme wurden jedoch sichtbar, wenn Kinder keinen Anhaltspunkt zum Modellieren hatten.

Offensichtlich werden nicht alle Kenntnisse um das Teile-Ganze-Konzept im Verlauf der Grundschulzeit zwangsläufig so verinnerlicht, dass darauf aufbauend ein flexibles Teile-Ganze-Konzept konstruiert werden kann. Die Probleme der Fünftklässler, Beziehungen zwischen Mengen zielführend zu interpretieren, lassen folgenden Rückschluss zu: Das Teile-Ganze-Konzept gilt generell zu leichthin als ein *Basiskonzept*, das Kinder in der Grundschulzeit erwerben sollten. Aus diesem Grund ist es im 5. Schuljahr nicht mehr explizit Gegenstand des Unterrichts und wird als gegeben vorausgesetzt. Es sollte jedoch ein Ziel des Mathematikunterrichts in weiterführenden Schulen bleiben, Inhalte zum Teile-Ganze-Konzept wiederkehrend darzubieten bzw. zu erarbeiten.

5.2 Frühe mathematische Förderung

Im Folgenden werden die wesentlichen Ergebnisse zum Schwerpunkt der frühen Förderung zusammengefasst und daraus resultierende Schlussfolgerungen dargeboten. Ausgehend von der immensen Bedeutung des Vorwissens und der Auffassung des Erwerbs der Mathematik als Entwicklungsprozess, der der Einschulung vorgelagert ist, war es ein weiteres Ziel der Arbeit, Ansatzpunkte für die geeignete Gestaltung einer frühen fachgerechten Förderung zu finden. Drei Evaluationsstudien zum Förderprogramm „Mina und der Maulwurf“ erbrachten effektive Umsetzungsmöglichkeiten für die vorschulische mathematische Bildung.

5.2.1 Zentrale Befunde zur frühen mathematischen Förderung

Studie IV

In einer eigenen Längsschnittstudie wurde das Förderprogramm „Mina und der Maulwurf“ mit 134 Vorschulkindern 6 Monate vor ihrer Einschulung durchgeführt. Untersucht wurden die kurz- und langfristigen Effekte auf die Leistungen der Kinder. Dadurch konnte eine Antwort auf die Forschungsfrage gefunden werden:

- Können Kindern durch die Förderung verbesserte Startchancen für den Schulbeginn bzw. auch nachhaltig günstigere Lernvoraussetzungen gegeben werden?
  - Alle geförderten Vorschulkinder hatten unmittelbar nach der Förderung signifikant stärkere Leistungszuwächse zu verzeichnen als die ungeförderte Kontrollgruppe. Da in den teilnehmenden Kindergärten mit den Trainingsinhalten bis mindestens Baustein 3 gefördert wurde, ist davon auszugehen, dass die Kinder dadurch günstigere Voraussetzungen in Bezug auf die für diesen Zeitpunkt des Übergangs in die Grundschule wesentlichen zentralen Konzepte der Kardinalität und der Zerlegbarkeit erworben haben. Hinsichtlich ihrer mathematischen Lernentwicklung erhielten sie daher gute Startchancen für den Schulbeginn.
  - Die Kinder profitierten nicht nur von einem deutlichen Fördereffekt direkt nach dem Trainingsende, auch die langfristigen Effekte fielen 8 Monate nach Beendigung des Förderprogramms für die Experimentalgruppe signifikant stärker aus als für die Kontrollgruppe. Ihr Leistungsvorsprung war immer noch nachweisbar, obwohl nun die Kinder beider Gruppen derweil ein halbes Jahr gleichermaßen eine mathematische Beschulung erfahren hatten.

Studie V

In einer weiteren Interventionsstudie (Hildenbrand) wurde folgenden Fragen nachgegangen:

- Zeigt das Fördertraining „Mina und der Maulwurf“ eine unmittelbare Wirksamkeit auch für *jüngere* Kindergartenkinder?
- Unterscheiden sich die Effekte, wenn die Förderung systematisch mit einem Training („Mina und der Maulwurf“) oder spiel- und alltagsintegriert nach theoriegeleiteten Aspekten ohne ein strukturiertes Training erfolgt?

- Die Studie ergab, dass mit dem Programm auch jüngere, durchschnittlich 4,5-jährige Kinder erfolgreich gefördert werden können. Kinder, die mit dem Ausgangsniveau I in die Förderung gestartet waren, hatten einen signifikanten Fördereffekt zu verzeichnen. Kinder, die sich bereits auf einem höheren Ausgangsniveau als I befanden, konnten ihre mathematischen Fähigkeiten hingegen nicht verbessern. Das lag darin begründet, dass die Förderung vor allem auf die Umsetzung der Bausteine 0 und 1 bzw. ansatzweise auf Baustein 2 fokussiert hatte. Nur zeitlich eingeschränkt wurden Inhalte der höheren Bausteine 2 und 3 angesprochen. Die Kinder mit dem höheren Ausgangsniveau II oder III hätten die ausführliche Behandlung der Bausteine 0 und 1 nicht mehr in dem Umfang benötigt. Eine stärker adaptive Förderung hätte vermutlich bei diesen Kindern eine effektivere Wirkung gezeigt.
- Ein Vergleich der Gruppen entsprechend den Fortbildungsvarianten ergab eine deutliche Verbesserung der Kinder mit dem Ausgangsniveau I, die systematisch mit dem Trainingsprogramm „Mina und der Maulwurf“ gefördert wurden, im Gegensatz zu den Kindern mit dem gleichen Ausgangsniveau, die spiel- und alltagsintegriert gefördert wurden, oder die der nicht geförderten Kontrollgruppe angehörten.

  Bemerkenswert war, dass die Kinder der spiel- und alltagsintegrierten Fördergruppe im Vergleich zur Kontrollgruppe nicht besser abschnitten. Eine 5-malige Fortbildung, in der sich theoretisch mit der mathematischen Entwicklung auseinandergesetzt wurde und darauf abgestimmte spiel- und alltagsintegrierte Angebote erarbeitet wurden, schien trotz des hohen Engagements der durchführenden Fachkräfte für die Verwirklichung einer effektiven Förderung noch nicht ausreichend. Erzieherinnen und Erziehern sowohl fundiertes Theoriewissen zu vermitteln, als auch sie für eine strukturierte Vorgehensweise in Form des Programms „Mina und der Maulwurf“ anzuleiten, hatte hier vergleichsweise eine effektivere Förderung zur Folge.

Studie VI

Studie VI knüpfte an die eigene längsschnittliche Interventionsstudie IV an und verfolgte das Ziel einer tieferen Analyse, denn es waren mit Blick auf die dominante sprachliche Ausrichtung des Förderprogramms weitere Forschungsaspekte von Interesse:

- Können trotz der Sprachlastigkeit des Förderprogramms auch sprachlich schwache Kinder ihre *mathematischen Leistungen* verbessern?
- Können Kinder hinsichtlich ihrer *phonologischen Sprachverarbeitung* von dem stark sprachlich orientierten Fördertraining „Mina und der Maulwurf" profitieren?

- Bei den 5- bis 7-jährigen Kindern wurde ein Zusammenhang festgestellt zwischen den mathematischen Fähigkeiten und den phonologischen Sprachverarbeitungsleistungen, die hier aus einer zusammengesetzten Skala von Leistungen der phonologischen Bewusstheit und des phonologischen Arbeitsgedächtnisses bestand. Die Kinder zeigten in Übereinstimmung mit den jeweiligen Leistungen ihrer phonologischen Sprachverarbeitung entsprechende mathematische Fähigkeiten: Kinder mit geringen Sprachverarbeitungsleistungen zeigten geringe mathematische Fähigkeiten - hohe Sprachverarbeitungsleistungen hingen mit gut entwickelten mathematischen Fähigkeiten zusammen. Dieses Ergebnis bestätigt die Befunde aus zahlreichen anderen Studien.
- Für das Training ergab sich der positive Schluss, dass seine dominante sprachliche Ausrichtung kein Hindernis für die Kinder darstellte: Kinder mit schwachen Sprachverarbeitungsleistungen verbesserten ihre mathematischen Fähigkeiten durch das Training ebenso signifikant wie Kinder mit durchschnittlichen oder starken Sprachverarbeitungsleistungen. Der mögliche Einfluss der phonologischen Sprachverarbeitung auf die mathematischen *Fähigkeitszuwächse* wurde näher untersucht, indem alle Kinder in drei Gruppen nach schwachen, durchschnittlichen und starken Leistungen ihrer phonologischen Sprachverarbeitungsfähigkeit zum ersten Messzeitpunkt eingeteilt wurden. Es zeigte sich, dass *alle* Kinder der Experimentalgruppe einen signifikanten Leistungszuwachs in ihren mathematischen Fähigkeiten aufwiesen, *unabhängig von der Zugehörigkeit* zu einer phonologischen Sprachverarbeitungsgruppe.
- Neben der Feststellung, dass die Sprachlastigkeit nicht von Nachteil für den Erwerb des mathematischen Verständnisses ist, ergab die Studie weiterhin, dass das Training unterstützend auf die phonologischen Sprachverarbeitungsleistungen zu wirken vermochte. Die Analyse der drei Leistungsgruppen ergab, dass die Kinder der Experimentalgruppe mit den durchschnittlichen phonologischen Sprachverarbeitungsleistungen

unmittelbar nach dem Training einen signifikanten Leistungszuwachs in der phonologischen Sprachverarbeitung zu verzeichnen hatten. Diese Kinder konnten folglich auch sprachlich deutlich von dem Mathematiktraining profitieren. Selbst für die Kinder der Experimentalgruppe mit den schwachen phonologischen Sprachleistungen waren leichte Effekte und somit Tendenzen für einen Trainingserfolg nachweisbar. Es waren somit unspezifische Zuwendungseffekte durch das Training gegeben, obwohl das Training keine expliziten Übungen bot, die die phonologische Bewusstheit im weiteren Sinn bzw. das phonologische Arbeitsgedächtnis gezielt förderten.

5.2.2 Bedeutung der Studien für die frühe mathematische Förderung

Wird die Eignung des Förderkonzeptes „Mina und der Maulwurf“ unter den in dieser Arbeit aufgestellten *Kriterien* für eine angemessene und zielgerichtete mathematische Bildung genauer beleuchtet, ergeben sich daraus allgemeine Rückschlüsse und eine Perspektive für die mögliche Umsetzung in vorschulischen Institutionen. Aus den Befunden und den positiven Effekten der Studien lassen sich folgende Schlussfolgerungen herleiten, wobei sich theoretische und praktische kaum trennen lassen:

Als vielversprechend ist zu erachten, eine vorschulische Förderung anknüpfend an wesentliche mathematische Entwicklungsvoraussetzungen *entwicklungsorientiert* zu gestalten. Das Entwicklungsmodell von Fritz & Ricken diente bei der Konzipierung des Fördertrainings „Mina und der Maulwurf“ als Grundlage für die Inhalte. Durch die Ausrichtung an diesen Entwicklungslinien ist generell sicher gestellt, dass alle wesentlichen Inhalte, die bisweilen oftmals in den Kindertageseinrichtungen noch unklar sind, Berücksichtigung finden und darüber hinaus das frühe Verständnis systematisch und sinnvoll aufeinander aufbauend erworben wird.

Ein systematisches, angeleitetes Vorgehen bei der Inhaltsvermittlung durch ein Training war in seiner Wirksamkeit einem rein spiel- und alltagsintegrierten Förderansatz überlegen. Aber auch ein angeleitetes Förderkonzept muss gleichsam spielerische Lehr- und Lernsituationen bieten, damit die vorschulischen Institutionen ihren spezifischen Charakter bewahren. Diesbezüglich sind in dem Förderprogramm „Mina und der Maulwurf“ die Geschichten, das Bilderbuch, die vielfältigen Spiele sowie die alltagsintegrierten Angebote gegeben. Die sprachgebundene Präsentation der mathematischen Inhalte und die begleitende Verbalisierung beim Mathematiklernen waren sogar von sprachlichem Vorteil - einen solchen sprachlichen Nebeneffekt zu erzielen, kann eine bereichernde Möglichkeit beim Schriftspracherwerb darstellen.

Die nachhaltige Wirksamkeit des Förderprogramms „Mina und der Maulwurf“ selbst auf die Fähigkeiten der Vorschulkinder mit unterdurchschnittlichen Leistungen macht allgemein eine aussichtsreiche Realisierung des Ergreifens präventiver und kompensatorischer Maßnahmen für schwächere Kinder denkbar. Dadurch kann insbesondere Entwicklungsrückständen und späteren Rechenschwierigkeiten erfolgreich entgegengewirkt werden.

Förderung ist effizienter gestaltbar, wenn sie diagnostisch begleitet wird. Anhand des Diagnoseinstruments MARKO-D, das aus dem Entwicklungsmodell gewonnen wurde, lassen sich gezielt die arithmetischen Fähigkeiten von Kindern identifizieren. Darauf abgestimmt kann die Umsetzung der inhaltlich an die Entwicklungsniveaus angelehnten Bausteine des Programms „Mina und der Maulwurf“ erfolgen. Eine solche Passung von Fördermaßnahmen ist von maßgeblicher Bedeutung. Studie V zeigte, mangelt es der Förderung an Adaptivität an die Lernvoraussetzungen und werden dadurch Inhalte zu Fähigkeiten behandelt, über die Kinder bereits verfügen, können Effekte ausbleiben und Kinder erfahren keinen Lernzuwachs. Durch die Intervention hatten sich nur diejenigen Kinder der Stichprobe signifikant verbessert, deren Entwicklungsniveau den geförderten Inhalten entsprach.

Schließlich sei mit der bildungspolitischen Forderung nach der Gestaltung eines erfolgreichen Übergangs vom Kindergarten in die Grundschule noch ein letzter Aspekt zur angemessenen frühen Förderung genannt. Folgt man dem Leitgedanken, Bildungsprozesse anschlussfähig zu machen und die Transition zu erleichtern, ist für ein entwicklungsorientiertes Fördertraining zu plädieren: „Mina und der Maulwurf“ bietet umfassende Anregungen für Kinder bis hinauf zu einem Alter von 8 Jahren - dadurch ist das Programm nicht nur für frühe Bildungsprozesse im Kindergarten, sondern ebenfalls für die Förderung schwacher Rechner im ersten und zweiten Schuljahr in Grundschulen geeignet. Das bedeutet, im Rahmen der bildungspolitisch zunehmend ersuchten engeren Verzahnung von Elementar- und Primarbereich können mit dem Fördermaterial Lernprozesse im Kindergarten begonnen und in der kooperierenden Grundschule aufbauend in Kleingruppen mit schwächeren Kindern fortgesetzt werden. Aktuell wird eine solche Netzwerkarbeit zur Gestaltung des Übergangs an 10 Essener Kindertageseinrichtungen und 3 Grundschulen erprobt, die seitens der Universität (Arbeitsgruppe Fritz-Stratmann) begleitet und evaluiert wird. Die Vorschulkinder der Studie werden seit Januar 2013 mit „Mina und der Maulwurf“ in den Kitas gefördert - die Grundschulen werden in ihrem Anfangsunterricht eine individuelle Förderung der schwächeren Kinder mit den vertrauten Trainingsmaterialien weiterführen. Stellen sich durch das Vorhaben optimalere Startbedingungen für die Kinder heraus, könnte sich eine solche Vorgehensweise als Beispiel für eine bildungsorientierte Kindergartenarbeit und für eine sinnvolle, inhaltlich anknüpfende Förderung an den Schulen erweisen.

5.2.3 Ausblick

Das bisher durchgeführte Promotionsprojekt könnte um folgendes vertiefendes Untersuchungsinteresse ergänzt und erweitert werden:

- Einen interessanten Forschungsaspekt könnte vor dem Hintergrund des geplanten Aufbaus eines inklusiven Schulsystems die Untersuchung des Förderprogramms „Mina und der Maulwurf" auf seine Eignung für die effektive Unterstützung der Lernprozesse von Kindern mit besonderem Förderbedarf in der Schuleingangsphase darstellen.
- Die Längsschnittstudie IV hatte auch kognitive Variablen der Intelligenz und vor allem des Arbeitsgedächtnisses umfassend erhoben, ebenso wie zahlreiche Aspekte zum soziokulturellen Hintergrund der Studienkinder. Die Auswertung könnte einen weiteren Ertrag in der Diskussion um die Förderung erbringen.
- Mathematische Transferleistungen oder nicht-spezifische Trainingseffekte wurden in der Längsschnittstudie nicht gesondert erhoben. „Mina und der Maulwurf" hatte vor allem die Förderung von Konzepten zum Ziel, die als wesentliche Nadelöhre beim Erwerb des Rechnen Lernens zu sehen sind und die zweifelsohne für die Schuleingangsphase von gewinnbringendem Nutzen sind. Es blieb die Frage offen, inwiefern durch das Training auch Einfluss auf weitere, dem Curriculum entsprechende Kompetenzerwartungen genommen wurde. Um diesen Zusammenhang mit dem späteren Schulerfolg zu prüfen, wäre es künftig für eine Erfassung aller Fördereffekte von Interesse, auch ein curricular angelegtes Testinstrument einzusetzen.
- Bei der Durchführung des Förderprogramms wurde die Bedeutung des Teile-Ganze-Konzepts verstärkt berücksichtigt, indem entsprechende Inhalte explizite Thematisierung und Verbalisierung fanden - den Vorschulkindern wurden systematisch verschiedene Teile-Ganze-Inhalte während des Trainings dargeboten. Die diesbezüglichen Ergebnisse wurden jedoch noch nicht separat evaluiert. Es wäre ein zentrales Anliegen, mit Blick auf die Verbindung zu den in den Studien zum Teile-Ganze-Konzept gewonnenen Erkenntnisse, Aufschluss darüber zu finden, ob sich im Besonderen die Fähigkeiten des Teile-Ganze-Konzepts im Kindergarten maßgeblich haben fördern lassen und ob spezifische nachhaltige Auswirkungen auf die schulischen Leistungen der Kinder zu verzeichnen waren. Dieser Fokus soll auch auf die Evaluation der oben erwähnten derzeit laufenden Längsschnittstudie gerichtet werden.

6 Literaturverzeichnis

Adams, R. & Wu, M. (2002). *PISA 2000 Technical Report. Paris: OECD.* Zugriff am 4.07.2012 unter http://www.oecd.org/dataoecd/42/20/1841899.pdf.

Alloway, T. P., Gathercole, S. E., Adams, A.-M., Willis, C., Eaglen, R. & Lamont, E. (2005). Working memory and phonological awareness as predictors of progress towards early learning goals at school entry. *British Journal of Developmental Psychology, 23*(3), 417-426.

Alloway, T. P., Gathercole, S. E., Willis, C. & Adams, A.-M. (2004). A structural analysis of working memory and related cognitive skills in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 87, 85-106.

Anthony, J. L., Lonigan, C. J., Driscoll, K., Phillips, B. M. & Burgess, S. R. (2003). Phonological Sensitivity: A quasi-parallel progression of word structure units and cognitive operations. *Reading Research Quarterly*, *38*(4), 470–487.

Anthony, J. L., Lonigan, C. J., Burgess, S. R., Driscoll, K., Phillips, B. M. & Cantor, B. G. (2002). Structure of preschool phonological sensitivity: Overlapping sensitivity to rhyme, words, syllables, and phonemes. *Journal of Experimental Child Psychology, 82*, 65–92.

Armstrong, G. A. (1991). Use of the part-whole concept for teaching word problems to grade three children. *Dissertation Abstracts International, 52*(03), 833A.

Arndt, D., Sahr, K., Opfermann, M., Leutner, D. & Fritz, A. (2013). Core knowledge and working memory as prerequisites of early school arithmetic. *South African Journal of Childhood Education, 3*(1), 1-20.

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental Dynamics of Math Performance from Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology, 96*(4), 699-713.

Baddeley, A. D. (2003). Working memory and language: An overview. *Journal of Communication Disorders, 36*(3), 189–208.

Baddeley, A. D., Gathercole, S. E. & Papagno, C. (1998). The phonological loop as a language learning device. *Psychological Review, 105*(1), 158–173.

Balakrishnan, J. D. & Ashby, F. G. (1992) Subitizing: Magical numbers or mere superstition? *Psychological Research, 54*(2), 80–90.

Balakrishnan, J. D. & Ashby, F. G. (1991). Is subitizing a unique numerical ability? *Perception & Psychophysics, 50*(6), 555–564.

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number facts and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, *13*(1), 22-31.

Baroody, A. J., Wilkins, L. M., & Tiilikainen, S. (2003). The development of children's understanding of additive commutativity: From protoquantitative concept to general concept? In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 127-160). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, *17*(2), 137-175.

Baroody, A .J. (1991). Procédures et principe de comptage: leur développement avant l'école. In J. Bideaud, J., C. Meijac & J.P. Fischer (Eds.), *Les chemins du nombre* (pp. 133-158). Lille: Presse Universitaire du Septentrion.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N. & Spelke, E. S. (2006). Non-symbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition, 98*(3), *199–222.*

Barth, H., Kanwisher, N. & Spelke, E. S. (2003). Construction of large number representations in adults. *Cognition, 86*, 201–221.

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.-J. & Weiß, M. (Hrsg.). (2001). *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Opladen: Leske+Budrich.

Benz, C. (2010). Zählen ist nicht alles, was zählt. *MNU PRIMAR 2*(2), 52–57.

Bermejo, V. (1996). Cardinality development and counting. *Developmental Psychology, 32*(2), 263-268.

Bond, T. G. & Fox, C. M. (2007). *Applying the Rasch Model: Fundamental Measurement in the Human Sciences (2nd edition). London: Routledge.*

Booth, J. L. & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology, 41,* 189 -201.

Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R. & Walther, G. (2003): *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich.* Münster u. a.: Waxmann.

Bowey, J. A. (1996). On the association between phonological memory and receptive vocabulary in five-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology, 63*(1), 44–78.

Brannon, E. M., Abbott, S. & Lutz, D. J. (2004). Number bias for the discrimination of large visual sets in infancy. *Cognition, 93*(2), B59-B68.

Brannon, E. M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition, 83*, 223-240.

Briars, D. J. & Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, *1*(3), 245-296.

Bryant, P. (1997). Mathematical understanding in the nursery school years. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 53-67). East Sussex: Psychology Press.

Bryant, P. & Bradley, L. (1985). *Children's reading problems*. Oxford: Blackwell Publishers.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3-18.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan.

Carey, S. (2009). *The Origin of Concepts.* Oxford: Oxford University Press.

Carey, S. (2001). Cognitive foundations of arithmetic: Evolution and ontogenisis. *Mind & Language, 16*(1), 37-55.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children’s multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 3-20.

Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 7-44). New York: Academic Press.

Case, R. (1998). The development of conceptual structures. In W. Damon, D. Kuhn & R.S. Siegler (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol 2: Cognition, perception & language* (pp. 745-764). New York: Wiley.

Case, R. (1992). *The mind’s staircase: Exploring the conceptual underpinnings of children’s thought and knowledge*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Case, R. & Okamoto, Y. (1996). *The role of central conceptual structures in the development of children´s thought. Monographs of the Society for Research in Child Development, 61*(1-2, Serial No. 246). Chicago: University of Chicago Press.

Clarke, B., Clarke, D., Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Mathematische Kompetenzen von Vorschulkindern: Ergebnisse eines Ländervergleichs zwischen Australien und Deutschland. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(3/4), 259-286.

Clearfield, M. W. (2004). Infants' enumeration of dynamic displays. *Cognitive Development, 19*(3), 309-324.

Clearfield, M. W. & Mix, K. S. (2001). Amount versus number: Infants' use of area and contour length to discriminate small sets. *Journal of Cognition and Development, 2*(3), 243-260.

Clearfield, M. W. & Mix, K. S. (1999). Number versus contour length in infants’ discrimination of small visual sets. *Psychological Science, 10*(5), 408-411.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). Effects of a Preschool mathematics Curriculum: Summative Research on the Building Blocks Project. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 136-163.

Clements, D. H., Sarama, J. & DiBiase, A.-M. (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cooper, R. G., Jr. (1984). Early number development: Discovering number space with addition and subtraction. In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 157-192). Hillsdale, NJ: LEA.

Costard, S., Springer, L. & Schrey-Dern, D. (2007). *Störungen der Schriftsprache: Modellgeleitete Diagnostik und Therapie*. Stuttgart: Thieme.

Cutting, L. E. & Denckla, M. B. (2001). The relationship of rapid serial naming and word reading in normally developing readers: An exploratory model. *Reading and Writing: An Interdisciplinary Journal, 14*, 673-705.

Davis, H. & Périusse, R. (1988). Numerical competence in animals: Definitional issues, current evidence, and a new research agenda. *Behavioral and Brain Sciences*, *11*, 561-615.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (2006). Mathematical thinking and learning. In K. A. Renninger, I. E. Sigel, W. Damon & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology, Vol. 4: Child psychology and practice* (pp. 103-152). Hoboken, NJ: Wiley.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, 44, 1-42.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1994). Dissociable mechanisms of subitizing and counting: Neuropsychological evidence from simultanagnosic patients. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *20*(5), 958-975.

Dehaene, S. & Changeux, J. P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal model. *Journal of Cognitive Neuroscience, 5,* 390-407.

De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B. & Ghesquiere, P. (2009). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*(3), 186-201.

Desoete, A. & Grégoire, J. (2006). Numerical competence in young children and in children with mathematics learning disabilities. *Learning and Individual Differences, 16*(4), 351–367.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag* *von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten.* Berlin: Logos.

Ehlert, A., Fritz, A. & Leutner, D. (submitted). Decorative embedment of math problems and math performance: Do children really need nice stories and motivating pictures?

Ehmke, T., Siegle, T. & Hohensee, F. (2005). Soziale Herkunft im Ländervergleich. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?* (S. 235–268). Münster: Waxmann.

Fechner, G. T. (1860). Elemente der Psychophysik, Breitkopf & Hartel.

Feigenson, L. & Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition, 97*, 295-313.

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. S. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, *8*(7), 307−314.

Feigenson, L., Carey, S. & Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: object-files versus analog magnitudes. *Psychological Science, 13*(2), 150–156.

Féron, J., Gentaz, E. & Streri, A. (2006). Evidence of amodal representation of small numbers across visuo-tactile modalities in 5-month-old infants. *Cognitive Development, 21*(2), 81-92.

Fischer, F. E. (1990). A part-part-whole curriculum for teaching number in the kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(3), 207-215.

Friedrich, G. & Munz, H. (2006). Förderung schulischer Vorläuferfähigkeiten durch das didaktische Konzept "Komm mit ins Zahlenland". *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53,* 134-146.

Friedrich, G. & de Galgóczy, V. (2004). *Komm mit ins Zahlenland. Eine spielerische Entdeckungsreise in die Welt der Mathematik*. Freiburg: Christophorus.

Fritz, A., Ehlert, A. & Balzer, L. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education, 3*(1), 38-67.

Fritz, A., Ehlert, A., Ricken, G. & Balzer, L. (in Vorbereitung). *MARKO-D-1- Mathematik- und Rechenkonzepte für die erste Klasse - Diagnose*. Göttingen: Hogrefe.

Fritz, A. & Ricken, G. (2008). *Rechenschwäche.* München, Basel: Reinhardt.

Frydman, O. & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, *3*, 323-339.

Fthenakis, W. E., Schmitt, A., Daut, M., Eitel, A. &, Wendell, A. (2009). *Natur-Wissen* *schaffen. Band 2: Frühe mathematische Bildung.* Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Fthenakis, W. E. (Hrsg.). (2003*). Elementarpädagogik nach PISA – Wie aus Kindertagesstätten Bildungseinrichtungen werden können.* Freiburg, Basel, Wien: Herder.

Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 53–187). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, C. K. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number.* New York: Springer.

Fuson, K. C. & Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49–107). New York: Academic Press.

Fuson, K., Richards, J. & Briars, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. In C. Brainerd (Ed.), *Progress in cognitive development research Vol. 1: Children's logical and mathematical cognition* (pp. 33-92). New York: Springer.

Gallistel, C. R. & Gelman, R. (2000). Non-verbal numerical cognition: From reals to integers. *Trends in Cognitive Sciences, 4*(2), 59-65.

Gallistel, C. R. & Gelman, R. (1991). Subitizing: The preverbal counting process. In W. Kessen, A. Ortony & F. Craik (Eds). *Memories, thoughts, and emotions: Essays in honor of George Mandler* (pp. 65-81). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gathercole, S. E., Willis, C. & Baddeley, A. D. (1991). Differentiating phonological memory and awareness of rhyme: Reading and vocabulary development in children. *British Journal of Psychology, 82*(3), 387–406.

Geary, D. C. (2000). From infancy to adulthood: the development of numerical abilities. *European Child and Adolescent Psychiatry, 9*(2), 11-16.

Geary, D. C. (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition. Implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist, 50*, 24-37.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R. & Meck, E. (1992): Early principles aid initial but not later conceptions of number. In: J. Bideaud, C. Meljac & J. P. Fischer (Eds.): *Pathway to number* (pp. 171-189), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gerlach, M. & Fritz. A. (2011). *Mina und der Maulwurf. Frühförderbox Mathematik.* Berlin: Cornelsen.

Gerlach, M., Fritz, A., Ricken, G. & Schmidt, S. (2007). *Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder*. Berlin: Cornelsen.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen.* Freiburg: Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.

Gervasoni, A. (2005). Opening Doors to Successful Learning for Those Who Are Vulnerable. In J. Mousley, L. Bragg & C. Campbell, *Mathematics: Celebrating Achievement: Proceedings of the 42nd Annual Conference of the Mathematics Association of Victoria* (MAV) (pp. 125–136). Brunswick, Victoria: MAV.

Ginsburg, H. P., Cannon, J., Eisenband, J. & Pappas, S. (2006). Mathematical Thinking and Learning. In K. Mc Carthy & D. Phillips (Eds.), *Blackwell Handbook of Early Childhood Development* (pp. 208-229). Malden u.a.: Blackwell.

Ginsburg, H. P., Balfanz, R. & Greenes, C. (2003). *Program Overview: Big Math for Little Kids (Pre-Kindergarten and Kindergarten)*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Girbau D. & Schwartz R.G. (2007). Non-word repetition in Spanish-speaking children with Specific Language Impairment (SLI). *International Journal of Language & Communication Disorders, 42*(1), 59–75.

Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia. *Science, 306*(5695), 496-499.

Goswami, U., Ziegler, J. C. & Richardson, U. (2005). The effects of spelling consistency on phonological awareness: A comparison of English and German. *Journal of Experimental Child Psychology, 92*(4), 345-365.

Goswami, U. & Bryant, P. (1990). *Phonological skills and learning to read*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Griffin, S. (2008). *Number Worlds: A prevention/intervention math program for Grades PreK-8*. Columbus, Ohio: SRA/McGraw-Hill.

Griffin, S. (2004). Teaching number sense. *Educational Leadership, 61*(5), 39-42.

Griffin, S. & Case, R. (1997). Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education, 3*(1), 1-49.

Griffin, S., Case, R. & Siegler, R. (1994). Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure. In K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Cognitive theory and classroom practice* (pp. 25–49). Cambridge, MA: MIT Press/Bradford.

Grube, D. (2006). *Entwicklung des Rechnens im Grundschulalter: Basale Fertigkeiten,* *Wissensabruf und Arbeitsgedächtniseinflüsse.* Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie: Bd. 52. Münster: Waxmann.

Grube, D. & Hasselhorn, M. (2006). Längsschnittliche Analysen zur Lese-, Rechtschreib- und Mathematikleistung im Grundschulalter: zur Rolle von Vorwissen, Intelligenz, phonologischem Arbeitsgedächtnis und phonologischer Bewusstheit. In I. Hosenfeld, F.-W. Schrader (Eds.), *Schulische Leistung. Grundlagen, Bedingungen, Perspektiven* (pp. 87-105). Münster: Waxmann.

Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Effekte vorschulischer mathematischer Förderung am Ende des ersten Schuljahres: Erste Befunde einer Längsschnittstudie. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 1*(1), 65–82.

Hagen, T. & Hillenbrand, C. (2012). Effektive Lernförderung in der Schuleingangsphase. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 8*, 323-334.

Halberda, J. & Feigenson, L. (2008). Developmental Change in the Acuity of the "Number Sense": The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-Year-Olds and Adults. *Developmental Psychology, 44*(5), 1457-1465.

Halberda, J., Mazzocco, M. & Feigenson, L. (2008). Individual differences in nonverbal number acuity predict maths achievement. *Nature, 455*(2), 665-668.

Hannula, M. M., Lepola, J. & Lehtinen, E. (2010). Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(4), 394-406.

Hannula, M. M., Räsänen, P. & Lehtinen E. (2007). Development of counting skills: Role of spontaneous focusing on numerosity and subitizing-based enumeration. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(1), 51-57.

Hasemann, K. (2007). *Anfangsunterricht Mathematik*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Hasemann, K. & Stern, E. (2002). Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben - Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *23*(3/4), 222-242.

Hasselhorn, M. (2010). Möglichkeiten und Grenzen der Frühförderung aus entwicklungspsychologischer Sicht. *Zeitschrift für Pädagogik, 56*(2), 168-177.

Hasselhorn, M. & Gold, A. (2006). *Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren*. Stuttgart: Kohlhammer.

Hasselhorn, M., Grube, D. & Mähler, C. (2000). Theoretisches Rahmenmodell für ein Diagnostikum zur differentiellen Funktionsanalyse des phonologischen Arbeitsgedächtnisses. In M. Hasselhorn, W. Schneider & H. Marx (Hrsg.), *Diagnostik von Lese-Rechtschreibschwierigkeiten. Tests und Trends, Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik , N.F. Band 1* (S. 167-181). Göttingen: Hogrefe.

Hauser, B. & Rechsteiner, K. (2011). Frühe Mathematik: Geführtes Spiel oder Training? *4 bis 8 - Schweizerische Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe*. Mai 2011, Nr. 5, 28-30.

Hecht, S. A., Torgesen, J. K., Wagner, R. K. & Rashotte, C. A. (2001). The relations between phonological processing abilities and emerging individual differences in mathematical computation skills: A longitudinal study from second to fifth grades. *Journal of Experimental Child Psychology, 79*(2), 192–227.

Hellmich, F. (2007). Möglichkeiten der Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten im vorschulischen Bereich. *Bildungsforschung, 4*(1). Zugriff am 05.08.2012 unter http://www.bildungsforschung.org/index.php/bildungsforschung/article/view/61/64.

Holloway, I. D. & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*(1), 17-29.

Hunting, R. P. (2003). Part-whole number knowledge in preschool children. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 217-235.

Huntley-Fenner, G. & Cannon E. (2000). Preschoolers' magnitude comparisons are mediated by a preverbal analog mechanism. *Psychological Science, 11*(2), 147−152.

Huttenlocher, J., Jordan, N. C. & Levine, S. C. (1994). A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General, 123*, 284-296.

Irwin, K. C. (1996). Children’s Understanding of the Principles of Covariation and Compensation in Part-Whole Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 25–40.

Jannuzi, C. (1998). Key concepts in FL literacy: Phonemic awareness. *Literacy Across Cultures, 2*(1), 7-12.

Jansen, H., Mannhaupt, G., Marx, H. & Skowronek, H. (2002). *Bielefelder Screening zur Früherkennung von Lese-Rechtschreibschwierigkeiten*. Göttingen: Hogrefe.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N. & Ramineni, C. (2007). Predicting First-Grade Math Achievement from Developmental Number Sense Trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice, 22*(1), 36-46.

Jugend- und Kultusministerkonferenz (2004). *Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen*. Zugriff am 28.06.12 unter: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_06_03-Fruehe-Bildung-Kindertageseinrichtungen.pdf.

Kahneman, D. & Treisman, A. & Gibbs, B. J. (1992). The reviewing of object files: Object-specific integration of information. *Cognitive Psychology*, *24*(2), 175-219.

Kahneman, D. & Treisman, A. (1984). Changing views of attention and automaticity. In R. Parasuraman & D. A. Davies (Eds.), *Varieties of attention* (pp. 29-61). New York:

Academic Press.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W. & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology, 62*(4), 498-525.

Kaufmann, L. & Nuerk, H.-C. (2005). Numerical development: current issues and future perspectives. *Psychology Science, 47*(1), 142-170.

Kiese-Himmel, C. & Reeh, M. (2009). Sequentielle Informationsverarbeitung bei Kindern mit und ohne auditiver Verarbeitungs- und Wahrnehmungsstörung. *HNO, 57*(12), 1285–1290.

Klein, A. &, Starkey, P. (2004). Fostering preschool children`s mathematical knowledge: Findings from the Berkeley Math Readiness Project. In D. H. Clements, J. Sarama & A.-M. DiBiase (2004*). Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 343-360). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Klicpera, C., Gasteiger-Klicpera, B. & Schabmann, A. (1994). Wieweit unterscheiden sich durchschnittliche Leser mit Rechtschreibschwierigkeiten von Kindern mit Lese- und Rechtschreibschwierigkeiten? Verlauf, Art der Rechtschreibfehler und Lernvoraussetzungen. *Zeitschrift für Kinder- und Jugendpsychiatrie, 22*(2), 87-96.

Klieme, E., Artelt, C., Hartig, J., Jude, N., Köller, O., Prenzel, W., Schneider, W. & Stanat, P. (2010). *PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt.* Münster u. a.: Waxmann.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenortth, H. E. & Vollmer, H.J. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise*. Berlin: BMBF.

Koontz, K. L. & Berch, D. B. (1996). Identifying simple numerical stimuli: Processing inefficiencies exhibited by arithmetic learning disabled children. *Mathematical Cognition, 2*(1), 1–23.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual-spating working memory, and preschool quantity-number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year-longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*(4), 516-531.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2008a). Kurz- und langfristige Effekte mathematischer Frühförderung im Kindergarten durch das Programm "Mengen, zählen, Zahlen". *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 40*(3), 135-146.

Krajewski, K., Schneider, W. & Nieding, G. (2008b). Zur Bedeutung von Arbeitsgedächtnis, Intelligenz, phonologischer Bewusstheit und früher Mengen-Zahlen-Kompetenz beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 55*(2), 100–113.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2007). *Mengen, zählen, Zahlen: Die Welt der Mathematik verstehen (MZZ)*. Berlin: Cornelsen.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53,* 246-262.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Krauthausen, G. (1995). Zahlenmauern im 2. Schuljahr – ein substantielles Übungsformat. *Grundschulunterricht 10*, 5–9.

Kunze, H.-R. & Gisbert, K. (2007). Förderung lernmethodischer Kompetenzen in Kindertageseinrichtungen. In Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) (Hrsg.), *Auf den Anfang kommt es an: Perspektiven für eine Neuorientierung frühkindlicher Bildung. Bildungsforschung Band 16* (S. 15-117). Bonn, Berlin: Digitale Zeiten GmbH.

Landerl, K., Bevan, A. & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9-year-old students. C*ognition, 93*, 99-125.

Langer, J., Gillette, P. & Arriaga, R. I. (2003). Toddlers` cognition of adding and subtracting objects in action and in perception. *Cognitive Development, 18*(2), 233-246.

Langhorst, P., Hildenbrand, C., Ehlert, A., Ricken, G. & Fritz, A. (2013). Mathematische Bildung im Kindergarten – Evaluation des Förderprogramms "Mina und der Maulwurf" und Betrachtung von Fortbildungsvarianten. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen. Tests und Trends* - *Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, N.F., Bd. 11* (S. 113-134). Göttingen: Hogrefe.

Langhorst, P., Ehlert, A. & Fritz, A. (2012). Non-numerical and Numerical Understanding of the Part-Whole Concept of Children Aged 4 to 8 in Word Problems. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(2), 233–262. DOI 10.1007/s13138-012-0039-5.

Langhorst, P., Ehlert, A. & Fritz, A. (2011). Das Teil-Teil-Ganze-Konzept – Voraussetzungen, Bedeutung und Nachhaltigkeit. *MNU Primar. Das Journal für den frühen mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, *3*(1), 10-17.

Le Corre, M. & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, *105*(2), 395-438.

Le Corre, M., Van de Walle, G., Brannon, E. M. & Carey, S. (2006). Re-visiting the competence/performance debate in the acquisition of the counting principles. *Cognitive Psychology*, *52*(2), 130-169.

Leslie, A. M., Xu, F., Tremoulet, P. D. & Scholl, B. J. (1998). Indexing and the object concept: developing 'what' and 'where' systems. *Trends in Cognitive Sciences*, *2*(1), 10-18.

Libertus, M. E. & Brannon, E. M. (2010). Stable individual differences in number discrimination in infancy. *Developmental Science, 13*(6), 900-906.

Lipton, J. S. & Spelke, E. S. (2005). Preschool children's mapping of number words to non-symbolic numerosities. *Child Development*, *76*(5), 978−988.

Lipton, J. S. & Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense: Large number discrimination in human infants. *Psychological Science*, *14*(5), 396–401.

Logan, G.D & Zbrodoff, J. (2003). Subitizing and similarity: Toward a pattern-matching theory of enumeration. *Psychonomic Bulletin & Review, 10*(3), 676-682.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern.* Münster: Waxmann.

Mack, W. (2002). *Die Wahrnehmung kleiner Anzahlen und die Entwicklung des Zahlenverständnisses beim Kleinkind*. Habilitationsschrift Fachbereich Psychologie und Sportwissenschaften der Johann Wolfgang Goethe – Universität Frankfurt am Main.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, *123*, 4–8.

Mandler, G. & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General, 11*, 1–22.

McCandliss, B. D., Yun, C., Hannula, M., Hubbard, E. M., Vitale, J. & Schwartz, D. (2010). *"Quick, how many?" Fluency in Subitizing and 'Groupitizing' Link to Arithmetic Skills.* Denver, CO: American Educational Research Association.

McCrink, K. & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science*, *15*(11), 776-781.

Metsala, J. L. (1999). Young children's phonological awareness and nonword repetition as a function of vocabulary development. *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 3–19.

Mix, K. S. (2009). How Spencer made number: First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*(4), 427-444.

Mix, K. S. (2002). The construction of number concepts. *Cognitive Development, 17* (Special issue: Constructivism Today), 1345-1363.

Mix, K. S. Huttenlocher, J. & Levine, S. C. (2002a). Multiple Cues for Quantification in Infancy: Is Number One of Them? *Psychological Bulletin, 128*(2), 278–294.

Mix, K. S., Huttenlocher, J. & Levine, S. C. (2002b). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York: Oxford University Press.

Mix, K. S., Levine, S. C. & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, *35*(1), 164-174.

Moosburger, H. (2012). Item-Response-Theorie. In H. Moosbrugger & A. Kelava (Hrsg.), *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion* (S. 227-274). Berlin, Heidelberg: Springer.

Moser Opitz, E. (2001). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen.* Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

Moyer, R. S & Landauer, T. K. (1967) Time required for judgement of inequality. *Nature, 215,* 1519–1520.

Müller, G. N. & Wittmann, E. (2004). *Das kleine Zahlenbuch, Bd. 2: Schauen und Zählen*. Seelze Velber: Kallmeyer.

Müller, G. N. & Wittmann, E.-C. (2002). *Das kleine Zahlenbuch. Band 1: Spielen und Zählen*. Seelze Velber: Kallmeyer.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Navarro, J. I., Aguilar, M., Marchena, E., Ruiz, G., Menacho, I. & Van Luit, J. E. H. (2012). Longitudinal study of low and high achievers in early mathematics. *British Journal of Educational Psychology, 82*(1), 28-41.

Obersteiner, A. (2012). *Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten. Konzeptionierung und Evaluation einer Förderung mit psychologisch-didaktischer Grundlegung und Evaluation im ersten Schuljahr.* Münster: Waxmann.

Pang, X., Madera, E., Radwan, N. & Zhang, S. (2010). *A Comparison of Four Test Equating* Methods. Report prepared for the Education Quality and Accountability Office (EQAO). Retrieved July 4, 2012, from http://www.eqao.com/Research/pdf/E/Equating_Crp_cftem_ne_0410.pdf.

Passolunghi, M. C., Vercelloni, B. & Schadee, H. (2007). The precursors of mathematics learning: Working memory, phonological ability and numerical competence. *Cognitive Development, 22*(2), 165-184.

Passolunghi, M. C. & Siegel, L. S. (2001). Short-term memory, working memory, and inhibitory control in children with difficulties in arithmetic problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology, 80*(1), 44–57.

Pauen, S. & Pahnke, J. (2008). Mathematische Kompetenzen im Kindergarten: Evaluation der Effekte einer Kurzzeitintervention. *Empirische Pädagogik, 22*(2), 193-208.

Pepper, K. & Hunting, R. (1998). Preschoolers' counting and sharing. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(2), 164-183.

Peterson, S. A. & Simon, T. J. (2000). Computational evidence for the subitizing phenomenon as an emergent property of the human cognitive architecture. *Cognitive Science,* *24*(1), 93-122.

Peucker, S. & Weißhaupt, S. (2005). FEZ - Ein Programm zur Förderung mathematischen Vorwissens im Vorschulalter. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 56*(8), 300-305.

Peucker, S. & Weißhaupt, S. (2002). Diagnose und Förderung des Zahlkonzeptes im Vorschulalter. In Forschungsbericht des Instituts für Psychologie der Pädagogischen Hochschule Freiburg.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde.* Stuttgart: Klett.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1965). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde.* (1. Auflage). Stuttgart: Klett.

Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Sciences (Special Issue: Space, Time and Number), 14*(12), 542-551.

Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D. & Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron, 44*(3), 547–555.

Piazza, M., Mechelli, A., Butterworth, B. & Price, C. J. (2002). Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? *NeuroImage, 15*, 435-446.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V. & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science, 306*(5695), 499-503.

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) (2008): *PISA 2006 in Deutschland. Die Kompetenzen der Jugendlichen im dritten Ländervergleich.* Münster u. a.: Waxmann.

Prenzel, M., Heidemeier, H., Ramm, G., Hohensee, F. & Ehmke, T. (2004). Soziale Herkunft und mathematische Kompetenz. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 273-282). Münster u. a.: Waxmann.

Quaiser-Pohl, C. (2008). Förderung mathematischer Vorläuferfertigkeiten mit dem Programm Spielend Mathe. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.), *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 203-125). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Rasmussen, C. & Bisanz, J. (2005). Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology, 91*(2), 137-157.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B., Bill, V. L., Lesgold, S. B. & Leer, M. N. (1991). Thinking in arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer & M. Knapp (Eds.), *Teaching advanced skills to at-risk students* (pp. 27-53). San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Resnick, L. B. (1989). Developing Mathematical Knowledge. *American Psychologist 44*(2), 162–169.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.

Ricken, G., Fritz, A. & Balzer, L. (2011). MARKO-D: Mathematik und Rechnen - Test zur Erfassung von Konzepten im Vorschulalter. In M. Hasselhorn & W. Schneider (Hrsg.), *Frühprognose schulischer Kompetenzen. Jahrbuch* der *pädagogisch-psychologischen Diagnostik - Tests und Trends, N. F. Band 9* (S. 127-146). Göttingen: Hogrefe.

Ricken, G., Fritz, A. & Balzer, L. (2013). *MARKO-D. Mathematik- und Rechenkonzepte im Vorschulalter - Diagnose*. Göttingen: Hogrefe.

Riley, M. & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, *5*(1), 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G. & Heller, J. H. (1983). Development of children´s problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Ross, S. (1989). Parts, wholes and place value: a developmental view. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 47-51.

Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion*. Bern: Huber.

Royar, T. (2007). Mathematik im Kindergarten. Kritische Anmerkungen zu den neuen „Bildungsplänen“ für Kindertageseinrichtungen. *mathematica didactica*, *30*(1), 29-48.

Russel, B. (1924). *Introduction to mathematical philosophy*. London: Allen & Unwin.

Sarnecka, B. W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition, 108*(3), 662-674.

Scarborough, H. S. (1998). Early identification of children at risk for reading disabilities: Phonological awareness and some promising predictors. In B. K. Shapiro, P. J. Pasquale & A. J. Capute (Eds.), *Specific reading disability: A view of the spectrum* (pp. 75-119). Timonium, MD: York.

Schneider, W. & Näslund, J.C. (1993). The impact of early metalinguistic competencies and memory capacities on reading and spelling in elementary school. Results of the Munich Longitudinal Study on the Genesis of Individual Competencies (LOGIC). *European Journal of Psychology and Education, 8*, 273-288.

Seymour, P. H. K., Aro, M. & Erskine, J. M. (2003). Foundation literacy acquisition in European orthographies. *British Journal of Psychology, 94*(2), 143-174.

Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 197–212). New York, NY: Psychology Press.

Siegler, R. S. & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Simon, T. J. (1997). Reconceptualizing the origins of number knowledge: a non-numerical account. *Cognitive Development, 12*, 349–372.

Singer, J. A. & Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional thinking: Are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 231–246.

Skowronek, H. & Marx, H. (1989). Die Bielefelder Längsschnittstudie zur Früherkennung von Risiken der Lese-Rechtschreibschwäche: Theoretischer Hintergrund und erste Befunde. *Heilpädagogische Forschung, 15*(1), 38-49.

Sophian, C. & Vong, K. I. (1995). The parts and wholes of arithmetic story problems: developing knowledge in the preschool years. *Cognition and Instruction*, *13*(3), 469-477.

Sophian, C. & McCorgray, P. (1994). Part-whole knowledge and early arithmetic problem solving. *Cognition and Instruction, 12*(1), 3-33.

Sophian, C. (1988). Limitations on preschool children's knowledge about counting: Using counting to compare two sets. *Developmental Psychology, 24*(5), 634-640.

Souvignier, E. & Förster, N. (2011). Effekte prozessorientierter Diagnostik auf die Entwicklung der Lesekompetenz leseschwacher Viertklässler. *Empirische Sonderpädagogik*, *3*, 243-255.

Spelke E. S. & Kinzler, K.D. (2007). Core knowledge. *Developmental Science*, *10*(1), 89-96.

Spelke, E. S. & Tsivkin, S. (2001a). Initial knowledge and conceptual change: Space and number. In M. Bowerman, S. C. Levinson (Ed.), *Language acquisition and conceptual development* (pp. 70-101). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Spelke, E. S. & Tsivkin, S. (2001b). Language and number: a bilingual training study. *Cognition, 78*(1), 45-88.

Spelke, E. S. (2000). Core Knowledge. *American Psychologist, 55*(11), 1233-1243.

Spinillo, A. G. & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, *5*(2), 181–197.

Starkey, P. & Cooper, R. G. (1995). The development of subitizing in young children. *Bri-*

tish Journal of Developmental Psychology, *13*, 399-420.

Starkey, P. & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, *210*(4473), 1033-1035.

Starkey, P., Spelke, E. S. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, *36*(2), 97-127.

Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer.

Steffe, L. P., Cobb, P. & von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J. & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and application.* New York: Praeger.

Steinke, D. (2008). Using part-whole thinking in math. *Focus on Basics*, *9*(A), 1-8.

Steinweg, A. S. (2005). Mit Kindern rechnen – Förderung mathematischer Kompetenzen ab dem Kindergarten. *uni.vers, 9*, 22-25.

Steinweg, A. (2009). Rechnest du noch mit Fingern? – Aber sicher! *MNU PRIMAR 1*(4), 124–128.

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter.* Lengerich: Pabst Publisher.

Stern, E. (1994). Die Erweiterung des mathematischen Verständnisses mit Hilfe von Textaufgaben. *Grundschule, 3*, 23-26.

Strauss, M. S. & Curtis, L. E. (1981). Infant perception of numerosity. *Child Development*, *52*(4), 1146-1152.

Szücs D. & Goswami, U. (2007). Educational neuroscience: Defining a new discipline for the study of mental representations. *Mind, Brain and Education, 1*(3), 114-127.

Thorpe, W. H. (1944). *Proceedings of the Linnaean Society of London.* Session 156 (part 2), 70–83.

Trick, L. M. & Pylyshyn, Z. W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, *101*(1), 80-102.

Trick, L. M. & Pylyshyn, Z. W. (1993). What enumeration studies can show us about spatial attention: Evidence for limited capacity preattentive processing. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *19*(2), 331-351.

Trick, L. M. (1992). A Theory of Enumeration that Grows Out of a General Theory of Vision: Subitizing, Counting, and FINSTs. In J. I. D. Campbell (Ed.), *The Nature and Origins of Mathematical Skills* (pp. 257-299). Amsterdam: North-Holland.

Tunmer, W. E. & Hoover, W. A. (1992). Cognitive and linguistic factors in learning to read. In P.B. Gough, L. E. Ehri & R. Treiman (Eds.), *Reading Acqusition* (pp. 175-214). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Van de Rijt, B. A. M. & Van Luit, J. E. H. (1998). Effectiveness of the Additional Early Mathematics program for teaching children early mathematics. *Instructional Science, 26*(5), 337-358.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2012). Mathematics education research should come more often with breaking news. *Lecture given on the occasion of receiving the Svend Pedersen Lecture Award 2011.* Retrieved July 4, 2012, from http://www.mnd.su.se/polopoly_fs/1.76181.1329229188!/menu/standard/file/svendPedersenLecture_120205.pdf.

van Galen, M. & Reitsma, P. (2008). Developing access to number magnitude: A study of the SNARC effect in 7-to 9-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology, 101*(2), 99–113.

van Loosbroek, E. & Smitsman, A. W. (1990). Visual perception of numerosity in infancy. *Developmental Psychology*, *26*(6), 916-922.

Van Luit, J. E. H. & Van de Rijt, B. A. M. (1995). *De rekenhulp voor kleuters: The Additional Early Mathematics Program*. Doetinchem: Graviant.

van Marle, K. & Wynn, K. (2009). Infants' auditory enumeration: evidence for analog magnitudes in the small number range. *Cognition*, *111*, 303-316.

van Oers, B. (2004). Mathematisches Denken bei Vorschulkindern. In W. Fthenakis & P. Oberhuemer (Hrsg.), *Frühpädagogik international. Bildungsqualität im Blickpunkt* (S. 313–329). Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

von Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie*, *50*, 191-218.

Wagner, R. & Torgesen, J. (1987). The nature of phonological processing and its causal role in the acquisition of reading skills. *Psychological Bulletin, 101*(2), 192-212.

Wakely, A., Rivera, S. & Langer, J. (2000). Can young infants add and subtract? *Child Development*, *71*(6), 1525-1534.

Walter, J. (2009). Theorie und Praxis Curriculumbasierten Messens (CBM) in Unterricht und Förderung. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 60*(5), 162-170.

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009). Ursachen für Lernschwierigkeiten im Bereich des Bruchzahlbegriffs und der Bruchrechnung. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 73-108). Weinheim: Beltz.

Weichbrodt, K. (1994). Rechenschwäche - oder nicht. *Grundschule, 5*, 25-27.

Weißhaupt, S., Peucker, S. & Wirtz, M. (2006). Diagnose mathematischen Vorwissens im Vorschulalter und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53*(4), 236-245.

Weinert, F. E. & Helmke, A. (Hrsg.). (1997). *Entwicklung im Grundschulalter*. Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Weinert, F. E. & Schneider, W. (1999). *Individual development from 3 to 12: Findings from the Munich longitudinal study*. Cambridge: Cambridge University Press.

Werner, B. (2009). *Dyskalkulie – Rechenschwierigkeiten. Diagnose und Förderung rechenschwacher Kinder an Grund- und Sonderschulen*. Stuttgart: Kohlhammer.

Willis, S. (2000). Strengthening numeracy: Reducing risk. In Australian Council for Educational Research (Ed.), *Improving numeracy learning: Research conference 2000: Proceedings* (pp. 31-33). Camberwell, Vic: ACER.

Wilson, A. J., Dehaene, S., Dubois, O. & Fayol, M. (2009) Effects of an Adaptive Game Intervention on Accessing Number Sense in Low-Socioeconomic-Status Kindergarten Children. *Mind, Brain, and Education 3*(4), 224-234.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2006). *Das Zahlenbuch 1.* Stuttgart, Leipzig: Klett.

Wittmann, E. C. (2004). Design von Lernumwelten zur mathematischen Frühförderung. In G. Faust, M. Götz, H. Hacker & H.-G. Roßbach (Hrsg.), Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich (S. 49-63). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Wright, B. D. & Linacre, J. M. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Management Transactions*, *8*(3), 370.

Wynn, K. (1996). Infants' individuation and enumeration of actions. *Psychological Science, 7*(3), 164–169.

Wynn, K. (1992a). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*, 749-750.

Wynn, K. (1992b). Children´s acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, *24*(2), 220-251.

Wynn, K. (1990). Children´s understanding of counting. *Cognition*, *36(2)*, 155-193.

Xu, F. & Arriaga, R. I. (2007) Number discrimination in 10-month-old infants. *British Journal of Developmental Psychology, 25*(1), 103-108.

Xu, F., Spelke, E. S. & Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. *Developmental Science, 8*(1), 88-101.

Xu, F. (2003). Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition, 89*(1), B15–B25.

Xu, F. & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month old infants. *Cognition, 74*(1), B1-B11.

Young-Loveridge, J. (2002). Early childhood numeracy: Building an understanding of part-whole relationships. *Australian Journal of Early Childhood, 27*(4), 36-43.

Ziegler, J. C. & Goswami, U. (2005). Reading acquisition, developmental dyslexia, and skilled reading across languages: A psycholinguistic grain size theory. *Psychological Bulletin, 131*(1), 3-29.